LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA-ÁLGEBRA

PEDRO JAVIER ROJAS G.
JORGE RODRÍGUEZ B.
JAIME HUMBERTO ROMERO C.
EUGENIA CASTILLO E.
LUIS ORIOL MORA V.

Grupo PRETEXTO

gaia grupo editorial

Colección Didáctica de las Matemáticas

LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA-ÁLGEBRA

LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA-ÁLGEBRA

PEDRO JAVIER ROJAS G.
JORGE RODRÍGUEZ B.
JAIME HUMBERTO ROMERO C.
EUGENIA CASTILLO E.
LUIS ORIOL MORA V.

Grupo PRETEXTO

Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

La Transición Aritmética-Álgebra / Colección : Didáctica de las Matemáticas / Pedro Javier Rojas G., Jorge Rodríguez B., Jaime Humberto Romero C., Eugenia Castillo E. Y Luis Oriol Mora V. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Santa Fe de Bogotá, D.C., 1999. **ISBN : 958-96440-3-1**

Segunda edición, 1999

Autores:
PEDRO JAVIER ROJAS G.
JORGE RODRÍGUEZ B.
JAIME HUMBERTO ROMERO C.
EUGENIA CASTILLO E.
LUIS ORIOL MORA V.

ación:
Grupo Editorial Gaia
Calle 74 No. 22-70
Teléfono: 482 20 61
Bogotá, D.C. Colombia
gaiaeditorial@gmail.com

Diseño de carátula:
Pedro Enrique Espitia Zambrano

Contenido

Introducción

En este escrito se presenta tanto algunas consideraciones en torno a dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, como resultados parciales de un estudio realizado con estudiantes de octavo grado, sobre interpretaciones de la letra en contextos algebraicos; así como también, algunos elementos a tener en cuenta en el diseño de actividades en el aula.

La mayoría de ideas planteadas en este escrito[1] hacen parte de los resultados de la investigación que desarrolló el Grupo PRETEXTO de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (1994-1996), y corresponden a planteamientos presentados en el informe del proyecto de investigación *La Variable en Matemáticas como Problema Puntual: Búsqueda de causas en octavo grado*, cofinanciado por la misma Universidad y COLCIENCIAS, Cód. Co. 1130-10-004-92

Se quiere plantear en este escrito algunas consideraciones en torno a la comunicación en la matemática escolar, entendiéndola desde la posibilidad de éxito que pueden tener los procesos de enseñanza y aprendizaje, y algunos de los problemas que entrañan estos procesos, lo cual es parte integrante de lo que en la actualidad se encuentra en la mira de los investigadores en Educación Matemática. Sin embargo, antes debe decirse que es ya punto de acuerdo que la inves-

[1] Adaptado como parte del material didáctico preparado para el Programa de Formación Permanente para Docentes ***"La Transición Aritmética-Álgebra"***, cofinanciado por la Universidad Distrital y el IDEP.

tigación didáctica no puede ni debe corresponder a un discurso al margen de las disciplinas específicas, y que además está el reconocimiento de que disciplinas colaterales como psicología, antropología, filosofía, historia, lingüística, informática, entre las más nombradas, son puntos de referencia teóricos importantes y necesarios tanto para la teorización, como para la investigación pedagógica.

Así, en el caso del trabajo en didáctica de las matemáticas, que por sus avances y bagaje teórico ha logrado la consolidación de un cuerpo de conocimiento, a la vez que una comunidad académica, alrededor de lo que internacionalmente se determina bajo el nombre de Educación Matemática, la investigación ha privilegiado la escolar. En ella la aritmética, el álgebra, y en los últimos tiempos, la lógica[2] y temas como funciones y límites.

Ahora bien, la existencia de dicho cuerpo de conocimiento no ha significado, al menos en el contexto colombiano, que éste haga parte del conocimiento profesional del profesor, por cuanto en la formación recibida no se aborda, como uno de los núcleos, el conocimiento generado en didáctica de las matemáticas -entendida no como una técnica de enseñanza sino como una disciplina que, mediada por una actitud reflexiva del profesor, posibilita convertir en problemas los fenómenos del aula, condición necesaria para reivindicar y entender la labor del docente como una *labor profesional* -.

Con este libro se intenta aportar elementos teóricos para posibilitar tanto procesos de reflexión sobre lo que acontece en el aula -no sólo desde el punto de vista de la cogni-

[2] En la lógica, la atención es puesta fundamentalmente en los enunciados condicionales, pues las formas de razonar en matemáticas, se separan de las del razonamiento mundano, en cuanto, como lo corroboró Piaget (1963), un *si P entonces Q*, es usualmente asociado a que se supone la conclusión, *Q*, y se buscan las condiciones, *P*, para tenerlo, lo cual dista radicalmente de la interpretación matemática.

ción, sino también desde la interacción social, en relación con la gestión de clase que hace el profesor-, como para construir propuestas de trabajo en el aula, en relación con el álgebra escolar.

En el primer capítulo se trata de poner en evidencia que desconocimientos en didáctica ocasionan incomunicación en el aula, independiente de la intención de las personas que interactúen en ella. En el segundo, se presenta resultados de investigación relacionados con algunas de las manifestaciones de los problemas asociados con la transición aritmética-álgebra (cambios en el tipo de convenciones usadas en la aritmética e interpretaciones de la letra en contextos matemáticos, entre otros). Para puntualizar un poco, se presenta algunos ejemplos que serán comentados más extensamente en el desarrollo de este capítulo:

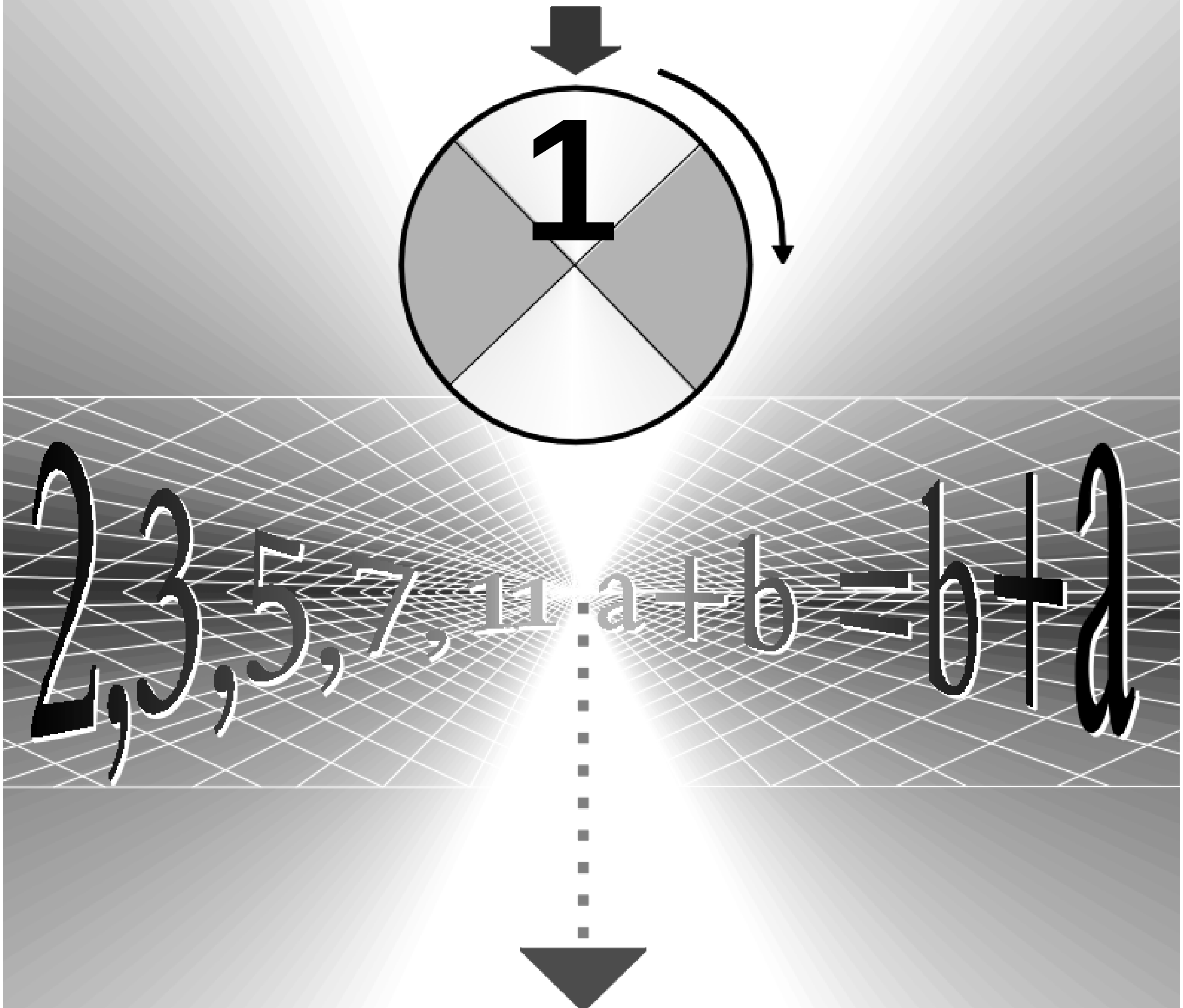
En aritmética se destaca el caso de la interpretación de los símbolos "=" y "-". Con respecto al primero se ha encontrado que en general los estudiantes lo interpretan como una orden de operar, de realizar una operación (especialmente en los grados cuarto a sexto), razón por la cual cuando se enfrentan a situaciones del estilo $3+\sqrt{3}$, donde el proceso encierra el resultado y viceversa, optan por una inconsciente aproximación: $3+1.7 = 4.7$ para darle sentido a su interpretación. Tal situación ha sido llamada *el conflicto proceso-producto*. Con relación al segundo, desde un punto de vista metodológico, hay tentativas de investigación en el aula tendientes a conseguir que tal símbolo no sea asociado, como hasta el momento se ha comprobado y corroborado, a negatividad: *anteponer el signo menos es sinónimo de negatividad*[3], lo cual puede ser comprensible, pues en aritmética, en el trabajo con números "concretos", así es indefectiblemente,

[3] Por ejemplo, la expresión $-x$ suele interpretarse como número negativo, independiente de los posibles valores que tome x

salvo el caso de situaciones por el estilo de -(-7).

En álgebra, uno de los temas estudiados es el tránsito de la aritmética al álgebra, en particular el de la interpretación de la letra en contextos matemáticos, que será el tema central en este escrito. Como caso destacable, se establece una cierta conexión entre las interpretaciones dadas a las letras, con las dadas a los números irracionales, especialmente en el caso de los expresados en forma de radial. Por ejemplo, un número considerable de estudiantes ignoran, o no usan los radicales, como ha concluido el Grupo PRETEXTO, ante la necesidad de dar sentido a estos símbolos, lo cual logran mediante el centramiento en las cantidades subradicales: "$\sqrt{3+5} = 8$", "$\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{14}$".

En el tercer capítulo se presenta una caracterización de la variable en matemáticas, tomando como referente los trabajos de Küchemann (1978, 1980 y 1981) y dos investigaciones realizadas en el contexto colombiano (PRETEXTO, 1996; OCHICA y CIFUENTES, 1998). En el cuarto, se plantea algunos elementos para el trabajo en el aula y se propone algunas actividades que, en el contexto de resolución de problemas, posibilitarían tanto procesos de generalización y simbolización, como aproximaciones a la interpretación de letra como número generalizado y como variable.



INCOMUNICACIÓN EN EL AULA : Algunos ejemplos

1 INCOMUNICACIÓN EN EL AULA : Algunos ejemplos

Cuando se está en una clase, particularmente de matemáticas, y en el contexto escolar (primaria y secundaria), uno de los principales elementos presentes es el lenguaje, tanto ordinario como matemático, desempeñando una función de mediador de la comunicación. Sin embargo, puede preguntarse hasta qué punto esta medición permite encuentros donde los interlocutores tengan la posibilidad de compartir significados de los discursos desarrollados.

En otros términos, que señalan la intención de este capítulo, se plantea la pregunta acerca de si a las *palabras* del lenguaje de las matemáticas puede atribuírseles una significación exacta, independiente del sujeto, o si por el contrario, ellas participan del carácter subjetivo de las del lenguaje ordinario, que al decir de Wittgenstein, tienen un significado dependiente de cada subjetividad, y por tanto es móvil tanto en el espacio y en el tiempo como en el sujeto que las significa. Puntualizando un poco más y a manera de ejemplo, ¿el significado que un matemático da a palabras como "conjunto", "pertenencia", "igualdad", "variable", entre muchas otras, es siempre el mismo y para todos?, ¿su simbolización: "**A**, **B**, **C**", "∈ ", "=", "**x**, **y**, **z**", no produce alteración de los significados matemáticos?, ¿estas palabras y estos símbolos pueden ser significados por los estudiantes e incluso por los profesores, al margen del uso que de ellas se haga en el contexto del lenguaje ordinario?.

Ahora bien, dado que un significado motiva, y va acompañado de una *representación*, surgen preguntas análogas: ¿esa representación es la misma en y para todos?, ¿tiene un carácter subjetivo?; éstas, junto con las formuladas en el párrafo precedente, serán enfrentadas desde una perspectiva práctica que llevará a darse algunas respuestas y por qué no, a tomar una posición frente a ellas, que desembocará en la tematización de algunos de los problemas de la comunicación en la matemática escolar, relacionado con la pretensión de evidencia de los discursos matemáticos escolares.

1.1 SITUACIONES DE AULA

Inicialmente, y para ambientar un poco los problemas de comprensión de parte de los estudiantes, surgidos de sus representaciones y significaciones de los conceptos matemáticos y su simbología, se presenta algunos ejemplos en el terreno práctico[4].

Situación 1. Un profesor, en grado sexto, tratando de explicar en qué consiste la igualdad entre conjuntos, escribe en el tablero la siguiente pregunta:

$$¿\{a, e, i, o, u\} = \{x \,/\, x \text{ es una vocal}\}?,$$

sorprendido, encuentra respuestas como:

- La igualdad no es posible pues ***x no es una vocal***.
- Es falsa porque el de la izquierda tiene cinco elementos y el de la derecha sólo dos (tiene dos equis).
- La igualdad es falsa pues el conjunto de la izquierda tiene cinco elementos, mientras que el de la derecha solo ***uno*** porque si x es ***una*** vocal, no puede ser cinco.
- ¡Claro!, porque x puede ser cualquiera de las cinco vocales.

[4] Los ejemplos aquí tratados no son hipotéticos, corresponden a situaciones de aula presentadas efectivamente.

Mirada la pregunta desde la perspectiva del profesor, la igualdad es ***evidente*** y entonces no sólo la noción de igualdad entre conjuntos se aclara, sino además las formas principales de determinarlos: por extensión y por comprensión.

Veamos ahora la perspectiva de los estudiantes en las dos primeras respuestas. En el primer caso el estudiante se encuentra inmerso en el mundo de lo ordinario cotidiano; los signos que aprecia son significados a partir de la relación que establece entre ellos y su mundo, del cual hacen parte las letras como elementos del alfabeto. En el segundo, no sólo se encuentra en el mundo de lo ordinario cotidiano, sino que a los signos en que basa su decisión los considera objetos en sí mismos, por lo que encuentra la diferencia en la cantidad.

Situación 2. ¿Es el triángulo , un triángulo rectángulo?

La respuesta, bastante frecuente entre los estudiantes hasta de grado noveno, es negativa. Es de suponer que el profesor formula la pregunta queriendo que los estudiantes, al responder, utilicen lo que caracteriza a dichos triángulos: tener un ángulo recto, y con la presunción que para el estudiante, como para él, la figura propuesta es una representación de un triángulo rectángulo cualquiera -no de uno específico-. Pero, ¿por qué esa respuesta?. Una explicación plausible puede obtenerse al tomar como referencia la práctica corriente, en la enseñanza de la geometría, de utilizar para hablar de perpendicularidad, el sentimiento inconsciente de perpendicularidad connatural al ser del "homus erectus", es decir, el estar de pie sobre una superficie que le da seguridad por la posibilidad de guardar el equilibrio. Más explícitamente, en la mayoría de los casos, la respuesta a esta pregunta es afirmativa cuando la posición del triángulo es tal que uno de sus catetos es paralelo a lo que le permite seguridad: el piso.

Aquí hace aparición, como comentario al margen, un hecho no estudiado suficientemente: los sentimientos de ligazón del estudiante con su mundo y la incidencia de éstos cuando de significar los signos del lenguaje matemático se trata.

Situación 3. En cuestionario presentado a aproximadamente 800 estudiantes de grados séptimo, octavo y noveno, distribuidos en tres colegios de estrato socio económico diferente de Santa Fe de Bogotá, aparecía la siguiente situación:

> *"Una manzana cuesta $200 y una pera $150. Si Y es el número de manzanas y Z es el número de peras compradas, ¿qué representa la expresión 200Y + 150Z?".*

Las interpretaciones dadas, en su mayoría, correspondieron a una de seis interpretaciones de la letra en contextos matemáticos[5]: ***letra como objeto***, como se refleja en respuestas como las siguientes: *"200 manzanas y 150 peras"*, *"la suma de las manzanas y las peras"*; *"el número de frutas compradas"*. Explícitamente, la letra es vista como representación de un objeto o como el objeto mismo.

Vale la pena, para fijar una posición respecto del conocimiento, decir que estas respuestas provienen de interpretaciones que de las letras hacen los estudiantes; por lo tanto, a estas respuestas no se les debe tratar como errores, más bien hay que aceptar su coherencia con respecto de la interpretación realizad. Este enfoque exige también encontrar razones que expliquen tales ocurrencias, por ejemplo, en el

[5] Las seis interpretaciones aquí aludidas son referidas mediante los siguientes nombres: *letra evaluada, letra ignorada o no usada, letra como objeto, letra como incógnita específica, letra como número generalizado y letra como variable;* tipificación ésta surgida de una investigación realizada por D. KÜCHEMANN, en el año de 1978, las cuales serán puntualizadas más adelante.

caso expuesto en esta situación se puede afirmar que es una ocurrencia debida -he aquí una responsabilidad del ejercicio docente-, al trabajo usual de los profesores en la iniciación al álgebra, cuando al querer hacer aparcer la letra le dan un uso que induce fuertemente esta interpretación, como en situaciones del estilo "15 flores más 8 flores da 23 flores" y luego escriben "15f + 8f = 23f", o, ya en el álgebra propiamente hablando, cuando plantean problemas como: "la edad de A es el doble que la de B y sumadas dan 30 años. ¿Cuáles son las edades?" y para modelar el problema escriben: "*A = 2B* y *A + B = 30, entonces 2B + B = 30...*", donde definitivamente la letra evoca la persona y no su edad.

1.2 LENGUAJE MATEMÁTICO Y TRABAJO EN EL AULA

La lectura entre líneas de los ejemplos mencionados apunta, pues, algunas de las razones para que la comunicación en matemáticas escolares sea tan poco exitosa en nuestras aulas, entendiendo por esto, la ausencia de comprensión significativa, tanto de aquello que hablamos cuando hablamos de matemáticas, como de las conexiones lógicas que validan la coherencia del discurso involucrado, bueno, en los casos donde efectivamente el discurso la tiene:

En primer lugar, aparece una actitud profesoral que, aunque inconsciente por lo natural a las personas, impide al decir de los constructivistas, un aprendizaje significativo: centrarse en la propia perspectiva, sin considerar las otras posibles de sus interlocutores. En otras palabras, creer que la evidencia manifestada para él en **su** discurso, se manifiesta también en sus estudiantes, provocando así de hecho, *una doble dificultad*. Por un lado, el desarrollo de unos contenidos que poco o nada son asimilados por los estudiantes, y por otro, una incapacidad por parte del profesor para buscar alternativas de explicación pues la consideración de evidencia, la consideración de que ***esto es claro a todas luces,*** se lo impide, y, por tanto, para hacer conciencia de estar siendo incomprendido.

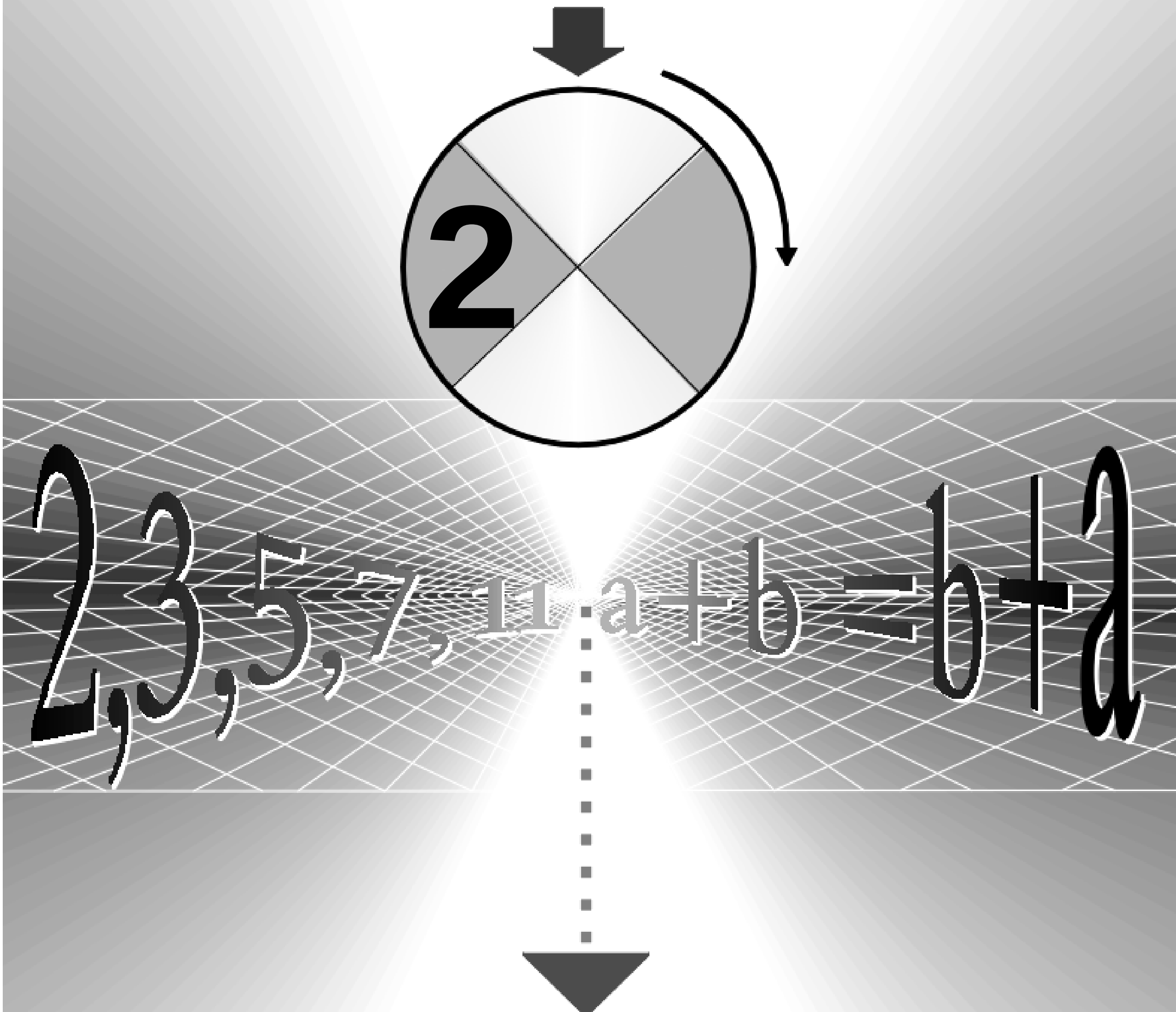
En segundo lugar, en la clase de matemáticas, ineludiblemente debe utilizarse tanto el lenguaje común, como el matemático. El primero intentando decodificar al segundo y éste a su vez, por una de las funciones atribuidas a los lenguajes ideales, intentando puntualizar significaciones matemáticas para algunas palabras presentes en el lenguaje ordinario. Esta dualidad, para el profesor, se presenta más como antagonismo, que como factor de comprensión, pues él, por su centramiento, pasa por alto que los significados requieren de un contexto de significación, es decir, desde una perspectiva cognoscitiva, que cada estudiante se desenvuelve en un mundo específico, único que tiene a su disposición, y que es en él donde tiene la posibilidad de encontrar aquellas existencias que le dan sentido y significado a las palabras, lo cual implica que el significado matemático de una palabra, en los procesos de formación, no puede, ni debe, desconocer el que ya tenga para el estudiante en el lenguaje ordinario. Un ejemplo adicional aclarará un poco más este pronunciamiento. Cuando se quiere llegar a una definición como: *dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales*, no debe perderse de vista, por ejemplo, que muy seguramente la palabra *semejanza*, es significada por el estudiante como *parecido*, concepto que aunque ligado fundamentalmente a lo puramente perceptual, involucra un criterio que puede no corresponderse con el criterio involucrado en la semejanza de triángulos.

El no tener conciencia de este confrontamiento de interpretaciones impide su dialogicidad rompiendo, incluso cuando existe honesta y explícita, la intención comunicativa.

Ahora bien, un hecho vinculado a los dos anteriores y que tiene su origen en el estilo tradicional de formación en matemáticas, lo constituye el desconocimiento, consciente o no, por parte del profesor, que esta disciplina tiene un lenguaje, lenguaje de una especificidad semántica y sintáctica que les son propias y que por lo tanto lo diferencian significativamente del lenguaje ordinario.

El pasar por alto dicha especificidad, el no hacer conciencia de este hecho, lleva entonces a que, en la clase de matemáticas se asuma, implícita e inconscientemente, el lenguaje ordinario como único en juego, posibilitándose en consecuencia que se llegue a pensar, o a concluir, también de manera incosciente, que la *formulación* lingüística de las matemáticas se logra a través de este lenguaje, que, por no corresponder estrictamente a lo que se pretende enseñar, y por ser manejado, bien o mal por el estudiante, hace erróneamente innecesarias, alusiones claras, explícitas, intencionales y continuadas acerca de la semántica y la sintaxis del lenguaje matemático[6]: el profesor no se detiene para hacer formulaciones en torno a la especificidad de la simbología matemática utilizada en un momento dado, ni a lo que ella quiere significar -menos aún a lo que ha significado para los estudiantes-, ni a la estructura del discurso; tampoco a las formas lógicas de construir esas estructuras. Así, los conceptos matemáticos permanecen para el estudiante en un "limbo" de nombres no contenidos por significación alguna. Se explica entonces por qué ***la memorización*** se constituye como única salida de los estudiantes para *sobrevivir*, temporalmente, en el mundo de las matemáticas.

[6] Recuérdese por ejemplo, que cuando se trabaja en aritmética, la concatenación de signos, en algunos casos, refiere aditividad: 23=20+3, mientras, al pasar al álgebra, ella refiere multiplicatividad: $2a=2{\times}a$. Esto, en la mayoría de los casos, no es tematizado por el profesor.



LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA-ÁLGEBRA

2 LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA-ÁLGEBRA

Son varios los problemas que se presentan en la transición aritmética–álgebra. En este capítulo se hará una referencia a algunas de sus manifestaciones generales, ubicadas dentro de aspectos que engloban los problemas referidos, en particular en los que desde el trabajo del Grupo PRETEXTO (1993) se ha caracterizado bajo el nombre de *Problemas puntuales* en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Manifestaciones que, si bien no aparecen explícitamente en los momentos de transición –grados sexto a octavo–, determinan en una alta medida la posibilidad de comprensión tanto de la relación entre aritmética y álgebra, como del álgebra misma.

En general, el trabajo sobre álgebra escolar desarrollado en las aulas gira en torno a los siguientes temas: *Conjuntos numéricos (números reales)*, *variables*, *simplificación de expresiones algebraicas* y *resolución de ecuaciones*. Ahora bien, a partir de los estudios realizados en el contexto colombiano, referidos en la introducción, pudo determinarse que las dificultades de los estudiantes -que son manifestaciones de los problemas- en relación con el trabajo algebraico coinciden, en gran parte, con las reportadas en otros trabajos investigativos[7], las cuales, según Kieran (1989) pueden clasificarse en tanto estén relacionadas con:

- *El cambio de convenciones respecto del referente aritmético,*
- *La interpretación de las letras y*
- *El reconocimiento y uso de estructuras* .

[7] Entre otras dificultades, podemos mencionar las relacionadas con el manejo de los universos numéricos y los procesos de simbolización.

En lo que sigue se presenta, de manera general, algunos resultados de investigaciones que dan cuenta de dificultades encontradas al cambiar las convenciones en la notación, respecto del referente aritmético que traen los estudiantes, y, de manera específica, los relacionados con las interpretaciones que éstos hacen de la letra en contextos matemáticos.

2.1 MARCO ARITMÉTICO DE REFERENCIA

Como lo plantea Kieran (1989), los escolares al comenzar el estudio del álgebra, traen nociones y enfoques de uso en el trabajo aritmético, pero que no son suficientes para abordar el trabajo algebraico, ya que éste no es una simple generalización del aritmético. Sin embargo, el hecho de que el álgebra pueda ser vista como la formulación y manipulación de proposiciones generales sobre los números, hace que la experiencia previa que el estudiante ha tenido con la estructura de expresiones numéricas en la escuela, tenga efecto sobre la habilidad para asignarle significado, y sentido, al álgebra escolar. Por ejemplo, la concatenación de símbolos cambia sustancialmente: mientras en aritmética concatenar símbolos (números) lleva implícita la suma de los valores posicionales (25=2decenas+5unidades ó $25 = 20+5$; $3\frac{1}{2} = 3+\frac{1}{2}$), en álgebra concatenar lleva implícito el producto ($2a$ significa $2\text{x}a$). Así, es posible que los estudiantes, por ejemplo, relacionen $2a$ y $2+a$ como expresiones equivalentes o también que sintácticamente asuman $a+a$ como aa o como a^2 ($a+a = aa = a^2$). En este sentido, resulta importante destacar un hecho encontrado en la investigación desarrollada sobre la variable en matemáticas por el Grupo PRETEXTO (1996): h^2 no se relaciona directamente con el producto *h.h* sino como conteo de *haches* (*hh* ó *h+h*), que aparecen dos veces independientemente de la operación.

Relacionado con lo anterior, puede mencionarse la dificultad que tienen los estudiantes para aceptar la falta de cierre, por ejemplo, aceptar como respuesta la expresión $a+b$, prefiriendo *cerrarla* (que es una exigencia presente de manera drástica en aritmética, al menos desde la mirada usual centrada en la aplicación de procedimientos de cómputo), lo cual induce a escribir $a+b = ab$ e incluso $2+3a = 5a$. Puede generalizarse esta situación, diciendo que el estudiante no acepta que proceso y resultado puedan ser lo mismo, dificultad que ha dado en llamarse *dilema proceso-producto*, la cual podría estar relacionada también con la interpretación del signo igual "=" como una orden de operar (Kieran, 1981; Moros et al., 1997) y con la dificultad para aceptar la *relación de igualdad* como una *relación de equivalencia.* Un hecho adicional a tener en cuenta es que el estudiante, en su trabajo previo, ha *enfrentado* problemas o situaciones en los cuales aparecen expresiones como $3+5$ o $2a+3a$, en las que ha podido decidir cuántas unidades de cada "cosa" hay, pues cuenta con una *unidad fija* de medida; luego, sin que haya una tematización sobre el particular, se le presentan expresiones como $2+\sqrt{3}$, donde ya no hay una unidad a partir de la cual saber cuántas de *esas* hay, hecho sobre el cual puede no haber conciencia. Sobre el particular, podría ser importante realizar un trabajo previo con operaciones que incluyan fracciones, donde se tematice el hecho de requerir de *unidades variables* (por ejemplo, para sumar 2 con $\frac{1}{3}$, se toma como unidad de medida $\frac{1}{3}$, aunque también lo serían $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$,...; mientras que para sumar 2 con $\frac{3}{4}$ se toma $\frac{1}{4}$ como unidad de medida, y para sumar $\frac{2}{3}$ con $\frac{3}{4}$ se toma como unidad $\frac{1}{12}$).

2.2 INTERPRETACIÓN DE LAS LETRAS: Un primer acercamiento

Cuando se inicia el trabajo escolar en álgebra, al parecer, como se encontró manifestación a partir del estudio referido, se propone un *repaso* sobre los conjuntos numéricos (como conjuntos, no como sistemas), privilegiando el trabajo sobre lo operativo en términos de reglas para utilizar ciertos algoritmos sobre sus elementos; iniciando con naturales, pasando por los enteros y racionales, para concluir con la presentación de algunos irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., aunque induciendo la identificación con sus aproximaciones decimales. Posteriormente, y al hacer su *aparición* las letras, ya no de manera ocasional para representar cierta generalidad (en cuanto a nombrar elementos o expresar propiedades) o en fórmulas donde toman un valor específico dado, sino en el sentido de operacionalidad, tomadas como representantes de números arbitrarios de un cierto sistema numérico (visto como estructura[8]), no se hace referencia explícita, o no se hace énfasis, en qué conjunto se está trabajando, pues se espera que, *vistos* ya los conjuntos numéricos, el estudiante no sólo esté en capacidad de *manejarlos*, sino de asimilar que, en el que se está trabajando es el más amplio posible: el conjunto de los números reales, como posiblemente lo *asume* el profesor, sin verificar si entre las significaciones de los estudiantes *aparece* esta noción. Similarmente, cuando se trabaja con letras, se *asume* también una interpretación adecuada por parte de los estudiantes de lo que ellas significan en el contexto mencionado.

Las letras aparecen, en general, ligadas con expresiones sintácticas que adquieren sentido en estructuras definidas a

[8] Para reconocer estructura, es necesario conocer *estructuras* variadas que posibiliten "ver" analogías y diferencias. Si el único conjunto numérico que trabajan con relativo dominio, como sistema, es el de los Naturales, como al parecer sucede en los primeros años de la básica secundaria, ¿qué posibilidades tienen de ubicar dichas analogías y diferencias?.

partir de relaciones como *"igual que", "menor que",* y de acuerdo con las interpretaciones que los muchachos tengan tanto de estas relaciones, como de los símbolos que las representan. Por ejemplo, para las interpretaciones de las letras, y en general de las *expresiones algebraicas*, el estudiante trae como sistema de referencia el aritmético, así que, desde éste, la mayor posibilidad de contextualizar conceptualmente el uso de la letra, es verla como una generalización de número[9], para lo cual, además, es indispensable un trabajo consciente e intencionado por parte del profesor. Sin embargo, tal interpretación es insuficiente, puesto que el álgebra, además de corresponder a un hacer explícito aquello que aparece implícito en la aritmética, es decir, su estructura, tiene que ver con la formalización de procedimientos en los que es necesaria, si no la explicitación de las propiedades, sí la conciencia de cuáles legitiman dichos procedimientos.

Aquí es oportuno resaltar, que de esos procedimientos, los estudiantes tienen la posibilidad de no dar cuenta por el hecho que en el trabajo aritmético, el resultado es tomado, y funciona bien, como criterio de corrección. También en este sentido, es importante señalar que el profesor, concientemente o no, hace uso de la posibilidad mencionada, con lo cual, los métodos intuitivos, y los métodos en general, utilizados por los estudiantes, prácticamente nunca son discutidos.

Sintetizando lo expuesto anteriormente, y a manera de conclusión, resulta conveniente resaltar, en particular, la importancia que tiene para el aprendizaje del álgebra, superar la

[9]En la transición aritmética-álgebra, se pasa de expresiones como $2(2)+1$, la cual puede reducirse a un sólo término, el 5, a otras como $2b+1$, donde ya no es posible tal reducción. Así, los estudiantes se ven abocados a la dificultad conocida como *falta de cierre*, la cual conlleva otra adicional de carácter estructural, pues expresiones como $a^2 - b^2$ refieren una gama amplia de situaciones, como por ejemplo: $x^2 - y^2$, $(a^3)^2 - 9$, $(5w+1)^2 - (a^3)^2$,... y su forma de trabajarlas, lo cual exige para su comprensión *ver* lo general en lo particular y lo particular en lo general. Esto, sin embargo, no es tematizado en general en el aula de clase; tampoco en los textos escolares.

interpretación del signo igual como orden de operar, si se quiere acceder a una interpretación de la letra que, además de ser representación de número, considere el tipo (en este caso el conjunto numérico) al que ella pertenece, es decir, tanto su universo numérico como las relaciones que le dan a él estructura (algebraica, en este caso); y en relación con esto, tanto superar, en palabras de Matz y Davis (1980), el *dilema proceso-producto*, como aceptar lo que Collis (1975) llama *aceptación de la falta de cierre*[10] .

2.3 RECONOCIMIENTO Y USO DE ESTRUCTURAS

Después del trabajo con letras, particularmente orientado al uso de éstas como representante de números, se empieza a operar con ellas en el contexto de las expresiones algebraicas. Kieran (1989) reporta investigaciones relacionadas con la posibilidad de una aproximación geométrica para dar sentido a las dichas expresiones y descubrir obstáculos cognitivos asociados con esta aproximación; estas investigaciones sugieren que la construcción de sentido de tales expresiones no lleva necesariamente al desarrollo espontáneo de sentido para la simplificación de expresiones algebraicas. Sobre el particular, reporta investigaciones relacionadas con el conocimiento estructural que tienen los estudiantes de dichas expresiones, evidenciado a partir de los procesos que ellos usan para simplificarlas, y plantea que las dificultades de los estudiantes en la asimilación de la estructura de las expresiones algebraicas[11] influye en su trabajo con ecuaciones.

[10] Autores citados por Kieran (1989).

[11] Reporta una investigación de Greeno (1982), según la cual el desempeño de los estudiantes novatos en álgebra parecía ser bastante al azar, por lo menos en un momento. Sus procedimientos contenían múltiples errores, que indicaban una carencia de conocimiento acerca de las características estructurales del álgebra Por ejemplo, podían simplificar 4(6x-3y)+5x como 4(6x-3y+5y) en un intento, pero hacer algo diferente en otra ocasión.

En tal sentido, plantea Kieran, se han desarrollado, por una parte, estudios centrados en el reconocimiento por parte del estudiante de la *estructura superficial* subyacente (es decir, a la forma dada o a la organización de los términos y las operaciones, sujetos a las restricciones que implica el orden de las operaciones), por ejemplo, reconocer el orden de las operaciones en la expresión 2(x+1)+3; por otra, estudios centrados en la posibilidad del estudiante para discriminar las transformaciones correctas de las incorrectas, es decir, de la *estructura sistémica* (en el sentido de estar relacionada con el "sistema" del cual hereda las propiedades de las operaciones, tales como la conmutatividad y asociatividad, y las relaciones entre las operaciones como la distributividad), por ejemplo, reconocer que la expresión 3(x+2)+5 equivale a 5+3(x+2) ó a 3x+11.

En el caso de las ecuaciones, recalca Kieran, la estructura incorpora las características de la estructura de las expresiones (pues una ecuación relaciona dos expresiones). Así, la estructura superficial de una ecuación comprende tanto los términos dados y las operaciones de las expresiones a ambos lados de la igualdad, como la relación de igualdad y sus propiedades (por ejemplo, la propiedad aditiva asociada: si se adicionan cantidades iguales a cantidades iguales, las sumas son iguales); requiere además el conocimiento de la relación inversa entre adición y sustracción y entre multiplicación y división, la equivalencia de expresiones a ambos lados de una ecuación, y la equivalencia de ecuaciones en una cadena de resolución de ecuaciones). Por ejemplo, 3(x+2)+5=4x/2-7 se puede expresar como 3x+11=2x-7, en donde cada expresión es transformada de forma independiente. Por la relación de igualdad inherente a una ecuación, la expresión a mano izquierda sigue siendo equivalente a la expresión de la derecha después de las transformaciones sistémicas de una o de ambas expresiones.

Nuevamente se recalca aquí que gran parte del trabajo en la aritmética ha estado orientado a "encontrar *la* respuesta", énfasis que ha permitido a los niños arreglárselas con procedimientos informales e intuitivos; sin embargo, en álgebra, se les pide que reconozcan y usen la estructura que antes han tenido la posibilidad de evitar en aritmética, lo cual genera dificultades en la iniciación al álgebra como las mencionadas en las anteriores secciones (Kieran, 1989).

2.4 PROBLEMAS PUNTUALES EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En las matemáticas, existen ciertos conceptos o nociones que están en la base de algunas de sus áreas: aritmética, álgebra, cálculo, y, sin entrar en discusión respecto de su lugar, lógica; las cuales a su vez, se fundamentan respectivamente, al tiempo que fundamentan a las matemáticas como totalidad. Esto hace que en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas, tengan un peso significativo sobre otras nociones. No se pretende decir aquí que los mencionados a continuación son los que son, pero sí que se ubican dentro de lo dicho. Son ellos, en orden correspondiente: *proporcionalidad, variable, límite y enunciados condicionales*. En el siguiente cuadro se sintetiza la relación área–conceptos problema.

ÁREA	**CONCEPTO**
Aritmética	Proporcionalidad
Álgebra	Variable
Cálculo	Límite
Lógica	Enunciados condicionales

Lo dicho en el párrafo precedente, es ya una característica asociable a los problemas puntuales, inherente a dichos conceptos, otra, es que ellos, los conceptos, por el grado de abstracción que comparten, poseen una dificultad conceptual importante. Estas características, provocan entonces, de manera natural, dificultades tanto para su enseñanza, como para su aprendizaje, que se manifiestan en los siguientes aspectos:

Permanencia de la dificultad. Con esto se quiere significar que la dificultad se aprecia en el tiempo en dos sentidos. El primero, que aparece en los estudiantes, generación tras generación. El segundo, que una vez ha sido vivenciada por un estudiante específico, puede permanecer en él prácticamente durante toda su vida, si no se lleva a cabo un trabajo para superarla. En este último sentido, lo hecho puede ser consciente o inconsciente, pero cualquiera sea el caso, no hay memoria explícita y escrita de ello.

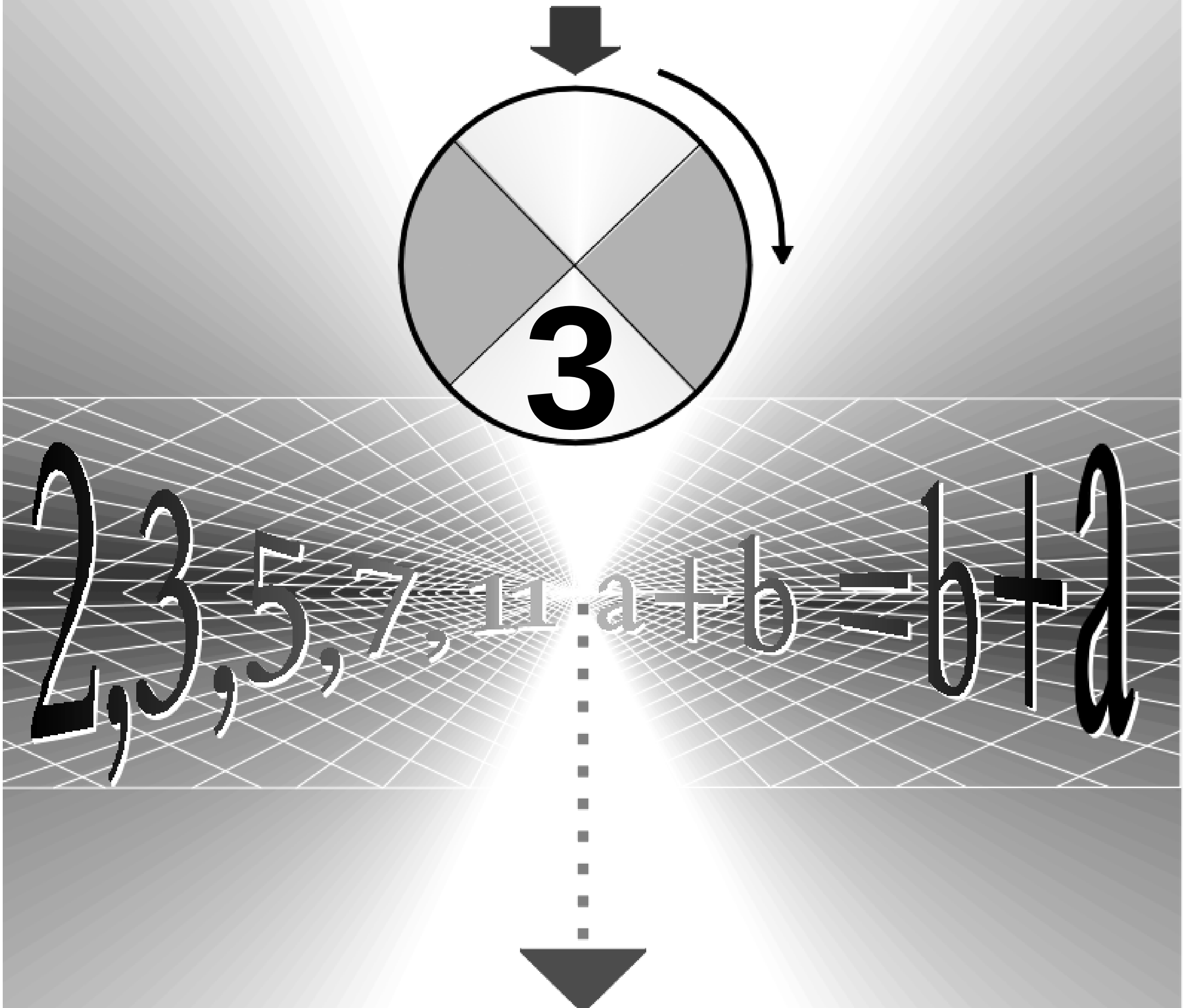
Presencia de la dificultad. Los problemas de incomprensión por parte de los alumnos, y las dificultades para el tratamiento por parte de los profesores, se presentan en la gran mayoría de estudiantes y docentes respectivamente.

Determina incomprensión. Cuando no se comprende uno de estos conceptos, se produce algo así como una reacción en cadena que lleva a que cada vez más conceptos sean incomprendidos, lo cual, como especulación plausible, puede ser una de las razones para la actitud displicente de los estudiantes para con las matemáticas.

Entorpecimiento del comportamiento algorítmico. Tiene que ver esto con dos aspectos del lenguaje, en particular del matemático. Semánticamente, cuando un concepto ha sido incomprendido, y por tanto no se le ha dado significación al grupo de signos por medio de los cuales se refiere el concepto, los trabajos de tipo sintáctico, que tienen que ver con los manejos algorítmicos, a lo más pueden llegar a desarrollarse de manera mecánica y memorística, pero nunca significando las acciones llevadas a cabo con los signos.

Limitante del desarrollo cognoscitivo. Las matemáticas en su naturaleza son de carácter abstracto, el no poder acceder a la comprensión de nociones tan fundamentales como las mencionadas, impide que los estudiantes desarrollen su capacidad de pensamiento formal, más generalmente aún, su capacidad de abstracción, lo cual obviamente conlleva problemas a nivel de otras áreas, incluso de la vida cotidiana.

Tal es el panorama de lo relacionado con los problemas puntuales, que valga aclararlo, no son los conceptos propiamente dichos lo que aquí se caracteriza como *Problema Puntual*, cuanto la situación de enseñanza y de aprendizaje, y en relación con las dificultades para lo uno y lo otro.



LA VARIABLE EN MATEMÁTICAS COMO PROBLEMA PUNTUAL

3 LA VARIABLE EN MATEMÁTICAS COMO PROBLEMA PUNTUAL

En este capítulo se presenta las ideas trabajadas por los integrantes del Grupo PRETEXTO, para profundizar en la explicitación de por qué la variable en matemáticas efectivamente se constituye como *problema puntual*, mediante la presentación de los aspectos que la hacen ser tal:

- La simbolización y los diversos usos que de ella se hacen conducen a las distintas interpretaciones de las letras (3.1).
- En la resolución de ciertos problemas algebraicos es necesario usar todas las interpretaciones de las letras (3.2).
- La exigencia de pensamiento formal para desempeñarse competentemente en el cuarto nivel de comprensión del álgebra (3.3).
- La caracterización de la noción de variable (3.4.3).
- La relación entre la caracterización de la noción de variable y las interpretaciones de las letras (3.4.4).
- Finalmente se describen algunas causas de incomprensión de la noción de variable atribuibles, en buena parte, a la formación del profesor de matemáticas (3.4.5).

3.1 INTERPRETACIONES DE LAS LETRAS

Puntualizando, respecto de la interpretación que puede darse a la letra en contextos algebraicos, los estudios de Küchemann (1978) han mostrado que las dadas por los estudiantes pueden tipificarse así:

(1) *Letra evaluada***.** A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido. Por ejemplo, al preguntársele: "si $e+f=8$, ¿cuánto es $e+f+g$?", el muchacho responde *12,* en lugar de $8+g$.

(2) *Letra no usada***.** Aquí la letra se ignora, o a lo más es reconocida (pero sin dársele un significado). Por ejemplo, al solicitarle "súmele *2* a $3n$", el muchacho escribe 5 o $5n$ en vez de $3n+2$.

(3) *Letra como objeto***.** La letra es vista como un nombre para un objeto, o como el objeto propiamente dicho. Por ejemplo, ante expresiones como "$2n+3n$" se piensa en "2 *naranjas* y 3 *naranjas*", o simplemente como "2 enes y 3 enes, lo cual significa 5 enes juntas". Si bien esta manera de operar puede servir para resolver fácilmente algunos ejercicios (por ejemplo en la suma de términos semejantes), puede ser errónea o carecer de significado en otros; como cuando se plantea que una libra es igual a cuatro marcas, en un cierto instrumento para pesar, y se traduce como $l=4m$ (lo cual no se tiene, en este caso, si l y m son números).

(4) *Letra como incógnita***.** Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido y el muchacho se lanza a operar con la letra vista de esta manera, a pesar de la falta de cerradura del resultado (como en las respuestas $8+g$ y $3n+2$).

(5) *Letra como número generalizado***.** La letra se ve como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor específico, como en "qué puede usted decir de C si $C+D=10$ y C es menor que D".

(6) *Letra como variable***.** La letra representa un rango de valores y el muchacho es capaz de describir el grado con

el cual los cambios en un conjunto se determinan por los cambios en otro (lo cual significa establecer al menos una relación de segundo orden). Un ejemplo es "*a=b+3*; ¿qué le pasa a *a* si *b* es incrementado en *2*?", donde los muchachos necesitan encontrar una relación como "*a* es siempre tres más que *b*", mejor que "este *a* es tres más que este *b*", lo cual no dice nada acerca de su relación con los cambios de *b*.

3.2 RELEVANCIA DE LAS DISTINTAS INTERPRETACIONES

Los distintos usos de las letras (que constituyen, en general, la manifestación simbólica de las variables), aunque parezcan simples para el que sabe, deben ser reconocidos por los estudiantes para "dotar de significado" el trabajo algebraico. En general, estas diferencias no son tematizadas en el aula de clase por parte del profesor, quien, al parecer, asume esto como un hecho irrelevante o no hace conciencia de dicha diferenciación. En tal sentido, puede resultar ilustrativo el siguiente ejemplo, referenciado por Ursini (1994, p.91), donde aparece manifiesta la necesidad, tanto de conocer diferentes usos de la letra (*variable* según Ursini), como de interpretarla en correspondencia con las interpretaciones requeridas para lograr resolver el problema:

> *"Encuentra la ecuación de la línea que pasa por el punto (6,2) y cuya pendiente es 11".*

Sobre este problema plantea[12]:

> *"Cuando para resolver este problema, se parte de la relación general que existe entre los puntos de la recta y su pendiente, a saber: Y=mX+b, queda implícito que se espera que el estudiante sea ca-*

[12] El subrayado es nuestro

> *paz de concebir las variables como números generales. En efecto, esta expresión describe una línea general y las variables involucradas representan números generales que pueden, por lo tanto, asumir cualquier valor. Sin embargo, para una línea particular, m y b no representan números generales, sino constantes. Por ejemplo, en el ejemplo arriba mencionado el valor de la pendiente está dado y tiene que sustituírse a m; b es una incógnita que puede determinarse usando los datos. X y Y son dos variables vinculadas por una relación funcional: X puede considerarse un argumento al que se le puede asignar cualquier valor mientras que los valores de Y cambian en correspondencia"*

Éste es, pues, un caso en el cual se hace necesario trabajar con distintas interpretacones de las letras: como números generalizados, como incógnitas y como variables (en una relación funcional).

Küchemann (1978), apoyado en los estudios de Collis (1975), toma un marco de referencia Piagetiano[13] para asociar a las interpretaciones 1 y 2 (evaluada y no usada/ignorada) el nivel bajo de las operaciones concretas, a la 3 (objeto) el superior de las operaciones concretas, a las 4 y 5 (incógnita y número generalizado) el nivel bajo de las operaciones formales y, finalmente a la interpretación 6 (variable) el superior de las operaciones formales. Esta asociación no puede tomarse, en general, como una correspondencia directa y así, por ejemplo, el hecho de evaluar la letra, en un cierto problema, no significa que el estudiante se encuentre en el nivel bajo de las operaciones concretas. Küchemann plantea que las interpretaciones que los estudiantes hacen de las letras dependen de la naturaleza y la complejidad de las preguntas; por esto, propone ejercicios de diferente complejidad, que requieren de una interpretación *mínima* (respecto de la jerarquización por él propuesta) para poder respon-

[13]Collis destaca que el orden de sucesión de los estadios permanece invariante, aunque las edades cronológicas correspondientes a los estadios pueden variar mucho de una cultura a otra, de una persona a otra, e incluso de una a otra tarea en una misma persona.

derlos correctamente[14] y, en tal sentido, no acceder a la interpretación requerida, se constituye en un indicativo sobre su nivel de razonamiento. Sin pretender profundizar en este aspecto, puede ser ilustrativo tomar uno de los ejemplos citados por Collis (1975) y explicitar un poco, desde su clasificación, la asociación que hace entre interpretaciones de la letra y niveles de desarrollo de los estudiantes:

> *"Debes decidir si las afirmaciones siguientes son verdaderas siempre, algunas veces o nunca. Haz un círculo alrededor de la respuesta correcta. Si haces un círculo alrededor de "algunas veces" explica en qué casos es cierta la afirmación. Todas las letras representan números enteros o cero (por ejemplo, 0,1,2,3,etc.).*
>
> *1. $a+b = b+a$* — *Siempre*
Nunca
Algunas veces, esto es, cuando...
>
> *2. $m+p+n = m+q+n$* — *Siempre*
Nunca
Algunas veces, esto es, cuando...
>
> *3. $a+2b+2c = a+2b+4c$* — *Siempre*
Nunca
Algunas veces, esto es, cuando...".

Estadio inicial de operaciones concretas. Los estudiantes tienden a considerar la letra como representante de *un* número determinado. En problemas como el citado (ítem 1), las letras son reemplazadas por un número específico y si éste falla, abandonan la tarea, si no, lo aceptan.

Estadio medio de operaciones concretas. Una diferencia notable, con respecto al nivel anterior, lo representa el

[14]De hecho, como se ejemplificará más adelante, en algunos problemas se requiere diversas interpretaciones de la letra para poder abordarlos comprensivamente.

hecho de una mayor familiaridad con la notación algebráica, la cual se manifiesta incluso en la aceptación de la falta de cierre en las expresiones. En el ejemplo citado anteriormente, los estudiantes pueden admitir que las letras tomen más de un valor específico, intentan con un par de números y si satisfacen la relación, sacan su conclusión sobre esta base; sin embargo, no pueden responder los ítemes 2 y 3.

Estadio de generalización concreta. El mayor avance de los jóvenes, en este nivel, es que pueden usar letras para representar incógnitas específicas o números desconocidos (no objetos), y trabajarlas como tales (con las mismas propiedades de los números con los cuales tuvieran experiencia previa); pueden, además, aceptar la falta de clausura en sus respuestas. Al trabajar con el ítem 2, pueden tener dificultades pues, aunque p y q varían simultáneamente, en tanto pueden ser uno dentro de la gran variedad de números, no necesariamente se acepta la posibilidad de que ambos se *encuentren* y, en tal sentido, no sacar la conclusión a partir de la deducción formal de que $p=q$; así como también, en el ítem 3, no poder aceptar que $2\text{x}(número) = 4\text{x}(número)$, y por tanto, no poder sacar la deducción formal que se desprende de la afirmación $2c = 4c$.

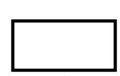
Estadio de las operaciones formales. Los jóvenes trabajan correctamente en el sistema definido, dentro del cual pueden sacar deducciones de tipo formal. Por ejemplo, pueden sacar las deducciones formales que les permite responder correctamente los ítemes 2 y 3 comentados anteriormente.

Desde la perspectiva de Collis, la capacidad de los alumnos para trabajar con pronumerales depende en gran parte de lo que ellos son capaces de considerar como "real".

3.3 NIVELES DE COMPRENSIÓN DEL ÁLGEBRA

Con base en el trabajo desarrollado por Collis, y en el marco del proyecto CSMS (Conceptos en Ciencias y Matemáticas en Secundaria), Küchemann (1981) establece cuatro *niveles de comprensión del álgebra* que están relacionados no sólo con las interpretaciones de letra, sino también con la estructura implicada (operaciones involucradas) y la naturaleza de los elementos con los que trabaja. Así, encuentra *grados de facilidad* (con base en el porcentaje total de estudiantes que resuelven adecuadamente los ítemes) para cada uno de los ítemes del test aplicado a 3000 estudiantes (13-15 años). Inicialmente trabajó con 51 ítemes, de los cuales dejó sólo 30 debido a la similitud de algunos de ellos y los resultados arrojados respecto a grado de facilidad.

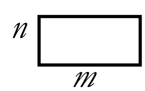
NIVEL 1: ***Bajo de las operaciones concretas.*** Los elementos de los ítemes son fundamentalmente numéricos (números pequeños) o tienen estructura simple (involucran una operación) y pueden ser solucionados interpretando la letra como objeto, evaluándola o incluso no usándola. Por ejemplo:

- *"Si sabe que a+b=43, ¿Cuánto es a+b+2?".*
- *"Simplifique la siguiente expresión: 2a+5a"*
- *"Calcule el área de la siguiente figura":* 6  10
- *" El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados.*

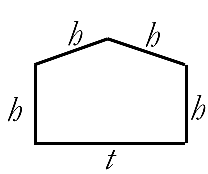
  Calcule el perímetro de la siguiente figura": *e* *e* *e*

Puede observarse que los anteriores ítemes pueden ser resueltos evaluando la letra (para el primer caso), no usándola (para el tercero) o interpretándola como objeto (para el segundo y cuarto), y que la estructura sólo involucra una operación. Además, las cantidades que se manejan son pequeñas. El grado de facilidad de los anteriores ítemes, en jóvenes de 13, 14 y 15 años fue: 92%, 97% y 95%, respectivamente, para el primer ítem; 79%, 89% y 90%, para el segundo, 77%, 86% y 87% para el tercero y 91%, 94% y 93%, para el último.

NIVEL 2: ***Superior de las operaciones concretas.*** La diferencia básica de los ítemes con los del nivel anterior es que su estructura es más compleja (involucran dos o más operaciones) o requieren el manejo de cantidades más grandes. En cuanto a interpretaciones de letra, se mantienen las del nivel anterior. Por ejemplo:

- *"¿Qué puede decir acerca de m, si sabe que m=3n+1, cuando n=4?"*
- *"Simplifique la siguiente expresión: 2a+5b+a"*
- *"Calcule el área de la siguiente figura":* 

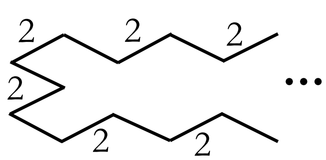
- *"El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados. Calcule el perímetro de la siguiente figura:*



Los ítemes anteriores, en relación con los del nivel 1, se diferencian en que su estructura es menos simple, pues requieren de más operaciones para solucionarlos. Los grados de facilidad, respectivamente, fueron los siguientes: 44%, 62% y 67% para el primero; 40%, 60% y 66% para el segundo; 54%, 68% y 76% para el tercero; 54%, 64% y 67% para el último.

NIVEL 3: ***Bajo de las operaciones formales.*** La interpretación de letra "mínima" requerida para solucionar los ítemes es la de incógnita específica (respecto a la jerarquización propuesta por Küchemann). La estructura en estos ítemes es relativamente simple y se manejan cantidades pequeñas. Por ejemplo:

- *"¿Qué puede decir acerca de r, si sabe que r=s+t y que r+s+t=30?"*
- *"Si sabe que e+f=8, ¿a qué es igual e+f+g?"*
- *"Simplifique la siguiente expresión: 2a+5b"*
- *"El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados. Calcule el perímetro de la siguiente figura:*

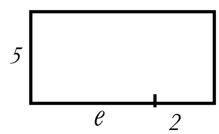


Aunque la figura no está totalmente dibujada, se sabe que es un polígono, con n lados y que todos son de longitud 2.

En este caso, los grados de facilidad respectivos son los siguientes: Para el primer ítem: 30%, 41% y 39%; para el segundo: 25%, 41% y 50%; para el tercero: 29%, 45% y 51%; para el último: 24%, 38% y 41%. Nótese que los ítemes de los niveles 3 y 4 se diferencian de los anteriores fundamentalmente en la interpretación de letra requerida para su solución.

NIVEL 4: ***Superior de las operaciones formales.*** Con respecto a los ítemes del nivel anterior, éstos tienen una estructura más compleja. Se incluyen más operaciones y números más grandes. Por ejemplo:

- *"Si $(x+1)^3 + x = 349$ cuando $x=6$, ¿qué valores de x hacen verdadera la expresión $(5x+1)^3+5x=349$?".*
- *"Simplifique la siguiente expresión: $(a-b)+b$"*
- *"n multiplicado por 4 se escribe $4n$. Multiplique $n+5$ por 4"*
- *"Calcule el área de la siguiente figura":*



Los grados de facilidad, respectivamente, fueron los siguientes: 4%, 12% y 16% para el primero; 15%, 23% y 32% para el segundo; 8%, 17% y 25% para el tercero; 7%, 12% y 16% para el último.

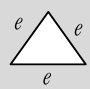
Küchemann, con base en los resultados del test (que contenía 30 ítemes y fue aplicado en Inglaterra a 3000 estudiantes, cuyas edades oscilan entre 13 y 15 años), encontró la siguiente clasificación de la población, con respecto a los niveles de comprensión (de lo que llama aritmética generalizada), para lo cual estableció un número total de ítemes de cada nivel que deberían ser resueltos correctamente por los estudiantes (se presentan los porcentajes de estudiantes clasificados por nivel y edad):

	13 años	**14 años**	**15 años**
Nivel 0 *(No clasificable)*	10	6	5
Nivel 1 *(4 de 6 ítemes)*	50	35	30
Nivel 2 *(5 de 7 ítemes)*	23	24	23
Nivel 3 *(5 de 8 ítemes)*	15	29	31
Nivel 4 *(6 de 9 ítemes)*	2	6	9

Ahora bien, quienes no respondieron adecuadamente el número mínimo de ítemes para estar en alguno de los cuatro niveles descritos, fueron clasificados en nivel 0. Esta última denominación, en el presente escrito, se considera no adecuada, en tanto sugiere una menor competencia de los estudiantes ubicados en este nivel para abordar los ítemes planteados, lo cual resulta discutible si se tiene en cuenta los resultados del estudio realizado en el contexto colombiano, según el cual algunos de los estudiantes clasificados en este nivel pudieron responder correctamente varios ítemes de niveles superiores. Por lo anterior, se prefiere "ubicar" a dichos estudiantes en la categoría *no clasificable*, para significar que en dichos casos se requiere de instrumentos que permitan complementar la información obtenida con éste.

En el contexto colombiano, específicamente en Santa Fe de Bogotá, se realizó una réplica parcial de esta investigación[15], a menor escala, con 133 jóvenes de octavo (13 años aproximadamente), 133 de noveno (14 años) y 123 de décimo (15 años); es decir, un total de 389 estudiantes, de dos colegios oficiales. Los resultados, en cuanto grado de facilidad, fueron diferentes, menores en el caso colombiano para la mayoría de los ítemes (en algunos la diferencia fue bastante considerable). Veamos en la siguiente tabla una comparación, por niveles, entre los grados de facilidad en los dos contextos mencionados, a partir de un ejemplo de ítem en cada uno de los niveles (resaltados en negrilla, en la columna derecha, aparecen los resultados del estudio realizado en Santa Fe de Bogotá, referenciado anteriormente):

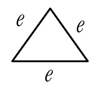
[15] Trabajo de Grado realizado por *ANDREA CIFUENTES y ADRIANA OCHICA* (1998), bajo la dirección del profesor *PEDRO JAVIER ROJAS GARZÓN*

ÍTEMES	Octavo grado (13 años)		Noveno grado (14 años)		Décimo grado (15 años)	
NIVEL 1: "El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados. Calcule el perímetro de la siguiente figura": 	91%	**20%**	94%	**73%**	93%	**78%**
NIVEL 2: "¿Qué puede decir acerca de m, si sabe que m=3n+1, cuando n=4?"	44%	**6%**	62%	**14%**	67%	**41%**
NIVEL 3: "Simplifique la siguiente expresión: 2a+5b"	29%	**3%**	45%	**7%**	50%	**29%**
NIVEL 4: "n multiplicado por 4 se escribe 4n. Multiplique n+5 por 4"	8%	**0%**	17%	**10%**	25%	**30%**

Ahora bien, para intentar acercarse a explicaciones sobre las dificultades encontradas por los estudiantes (que valga decir, pueden obedecer no sólo a problemas de aprendizaje, sino también de enseñanza), resulta de interés conocer algunas de las respuestas dadas por ellos[16] a los ítemes, que por otra parte, pueden brindar elementos para indagar sobre la plausibilidad o no de la propuesta de Küchemann, en relación con los niveles de comprensión del álgebra escolar.

[16] Estudiantes de 8° a 10° grado, de dos colegios oficiales de Santa Fe de Bogotá (1998).

[17] Resaltadas en negrilla aparecen las respuestas que fueron aceptadas como correctas. Es importante mencionar que en el primer ítem, la expresión e^3 se acepta como correcta, pues no fue interpretada por los estudiantes como potencia, en tanto el exponente lo consideraron como un *contador* de ***e***´s: *«sumamos los lados,* ***e*** *más* ***e****, más* ***e****, es decir* **tres** ***e****»* (la respuesta desde lo semántico es correcta, a pesar de que la escritura utilizada no es la convencional en el contexto del álgebra escolar usual, en tal sentido, no necesariamente errónea).

RESPUESTAS A LOS ÍTEMES [17]	Octavo (N1 = 133)	Noveno (N2 =133)	Décimo (N3 = 123)
El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados. Calcule el perímetro de la siguiente figura: 			
• ***3e***	**7%**	**37%**	**37%**
• $\boldsymbol{e^3}$	**13%**	**36%**	**41%**
• *Miden los segmentos de la figura*	26%	0%	0%
• *Valor numérico (evalúan e)*	24%	13%	9%
• *Otras respuestas*	22%	12%	11%
No contestan	7%	2%	2%
"¿Qué puede decir acerca de m, si sabe que m=3n+1, cuando n=4?"			
• ***m=13***	**6%**	**14%**	**41%**
• *m=35*	11%	23%	12%
• *Otros valores*	30%	20%	9%
• *Otras respuestas*	26%	23%	16%
No contestaron	27%	20%	22%
"Simplifique la siguiente expresión: 2a+5b"			
• ***2a+5b***	**3%**	**7%**	**26%**
• *7ab*	55%	47%	43%
• *Valores numéricos (evalúan a y b)*	8%	0%	0%
• *Otras respuestas*	14%	26%	9%
No contestaron	19%	20%	22%
«n multiplicado por 4 se escribe 4n. Multiplique n+5 por 4»			
• ***4n+20***	**0%**	**10%**	**30%**
• *20n*	65%	67%	45%
• *Valores numéricos*	12%	2%	3%
• *Otras respuestas*	15%	17%	17%
No contestaron	7%	5%	3%

Finalmente, retomando lo planteado en la sección 2.2, es importante mencionar que cuando se trabaja en álgebra con los estudiantes, no se hace explícito (o no se hace énfasis), por ejemplo, en qué conjunto numérico se está trabajando, pues *se asume* que éste es el más amplio posible: el conjunto de los números reales, sin verificar si entre las significaciones de los estudiantes *aparece* esta noción. Similarmente, cuando se trabaja con letras, *se asume* también una interpretación adecuada por parte de los estudiantes de lo que ellas significan en el contexto mencionado. Así, tiene sentido preguntarse, por ejemplo:

- ¿*Tiene* el estudiante, el conjunto de los racionales?, ¿el de los reales?
- Cuando *ve* la letra en contextos matemáticos, ¿Cómo la interpreta?
- ¿Exige la noción de variable, como posibilidad de interpretación de la letra, formas específicas de trabajo en el aula?
- ¿Qué interpretaciones de letra son necesarias para abordar comprensivamente el trabajo algebraico?

Como complemento a lo mencionado anteriormente, puede ser de interés describir algunos resultados relacionados con el cambio que se genera, en los grados de facilidad, al modificar la naturaleza de los elementos en los ítemes, hecho al que poca importancia se le concede, para nuestro trabajo en el aula. Los siguientes son algunos ejemplos:

CAMBIO EN LOS ELEMENTOS	ESTRUCTURA DEL ÍTEM	GRADO DE FACILIDAD[18]	CAMBIO (En grado de facilidad)
Números pequeños *a* *Números grandes*	Redacte una situación-problema que requiera realizar la operación: • 9 x 3 **• 84 x 2 8**	45% **31%**	14%
Números enteros *a* *Números fraccionarios*	Dibuje en el plano cartesiano las siguientes parejas ordenadas: • (2,5), (3,7), (5,11) **• (11/2 , 4)**	91% **77%**	14%
	Halle el área del rectángulo de medidas: • 6 por 10 **• 2/9 por 5/8**	89% **13%**	76%

	Halle el volumen del cubo dado, cuyas dimensiones son: • 3 x 2 x 2 • **2 x 2 ½ x 2 ½**	 68% **28%**	40%
Números enteros *a* *Números decimales*	Efectúe las siguientes operaciones: • 10 x 4 • **10 x 5,13** • 100 x 317 • **100 x 2,3** • 60÷3 • **60 ÷ 0,3**	 90% **58%** 58% **36%** 80% **28%**	32% 22% 52%
	¿Qué significa el 2 en la expresión?: • 521 • **0,2**	 87% **73%**	14%
Número conocido *a* *Número desconocido*	Halle el área del rectángulo dado, cuyas dimensiones son: • 6 y 10 • **5 y *e*+2**	 89% **12%**	77%
	Halle el número de diagonales de un polígono cuyo número de lados es: • 57 • ***k***	 75% **52%**	23%
Coordinación de Operaciones	• Sume 4 a 3*n* • **Multiplique *n*+5 por 4**	36% **17%**	19%
Datos explícitos *a* *Datos implícitos*	• Razón: 5/8x2/3 • **Un kilómetro es lo mismo que 5/8 de milla. ¿Cuánto es 2/3 de kilómetro?**	47% **8%**	39%

[18] El grado de facilidad, como ya se mencionó, corresponde al porcentaje de estudiantes que responden correctamente el ítem. Se excluye, por lo tanto, a quienes contestaron en forma incorrecta u omitieron dar respuesta. Los datos contenidos en la tabla, corresponden a respuestas de estudiantes de 14 años aproximadamente (test CSMS-Proyecto Chelsea), exceptuando los del primer ítem que corresponden a niños de 11 años.

3.4 ALGUNOS COMENTARIOS A PARTIR DE LA INVESTIGACIÓN DEL GRUPO PRETEXTO

Como se mencionó en la introducción, los integrantes del Grupo PRETEXTO, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, desarrollaron la investigación titulada *La Variable en Matemáticas como Problema Puntual: Búsqueda de causas en octavo grado* (1996), cuyo propósito fundamental era explicar causas de incomprensión del concepto de variable en matemáticas, así como también indagar sobre cuáles son las ideas que tienen los estudiantes de este concepto.

Dentro de las acciones metodológicas básicas utilizadas en la etapa de indagación, además de la observación del trabajo de aula (acercamiento etnográfico a la actividad al interior de la clase de matemáticas), diseñaron y aplicaron dos cuestionarios: uno, que buscaba ubicar las interpretaciones de letra en contextos matemáticos que hacían los estudiantes; otro, mediante el cual establecer los universos numéricos de que disponen y su desempeño matemático en ellos, así como también posibilidades de generalización, y la relación entre el trabajo con números y letras.

3.4.1 Primer cuestionario. Con base en los resultados de investigación comentados en las secciones anteriores, en el desarrollo del trabajo referido, al iniciar el año escolar (1994) se aplicó el primer cuestionario basado en la jerarquización propuesta por Küchemann para indagar acerca de la interpretación de la letra que se presentaba en los estudiantes de séptimo, octavo y noveno grados de los colegios donde se desarrolló la investigación, que sirviera además como punto de referencia, una vez transcurrida la primera mitad del año, respecto de si el trabajo desarrollado en álgebra en los distintos grupos de grado octavo, producía modificaciones a la interpretación inicial de las letras. El texto del cuestionario se presenta a continuación:

1. Si usted sabe que e+f=8, ¿ a qué es igual e+f+g= ?. ¿ Por qué ?

2. *n* multiplicado por 4 puede escribirse 4*n*. Multiplique por 4 la expresión *n*+5. ¿ Cómo lo hizo ?

3. Una manzana cuesta $150 y una pera $200. Si *y* es el número de manzanas y *z* el número de peras compradas. ¿Qué representa la expresión 150*y*+200*z*?. ¿Por qué?

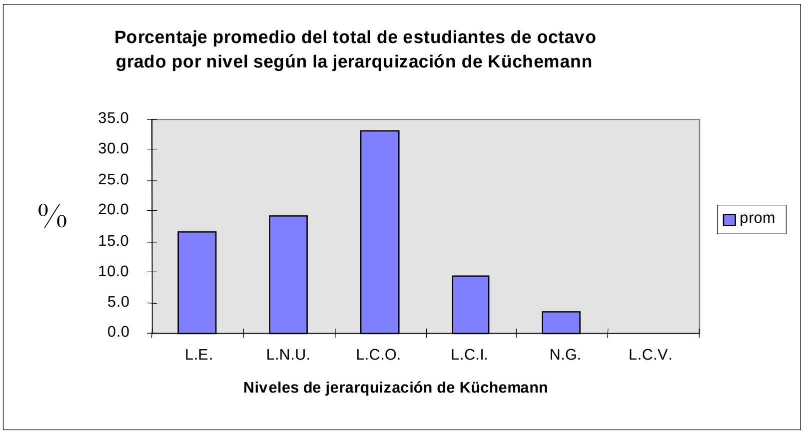
4. ¿Cuándo es correcta la siguiente expresión: L+M+N=L+P+N?. Subraye la respuesta correcta: Siempre (¿Por qué?); Nunca (¿Por qué?); A veces (¿En qué casos?).

5. ¿ Cuándo es correcta la siguiente expresión: a+2 = b+2?. Subraye la respuesta correcta: Siempre (¿Por qué?); Nunca (¿Por qué?); A veces (¿En qué casos?).

6. Si usted sabe que a=b+3. ¿ Qué le sucede a a si le añadimos 2 a b ?. ¿ Por qué ?

7. Si usted sabe que f=3g+1. ¿Qué le sucede a f si le añadimos 2 a g ?. ¿ Por qué ?.

Resultados. Las gráficas que seguidamente se presentan resumen las diferentes interpretaciones de la letra encontradas como resultado del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes del grado octavo a la prueba citada (N=256)[19]:

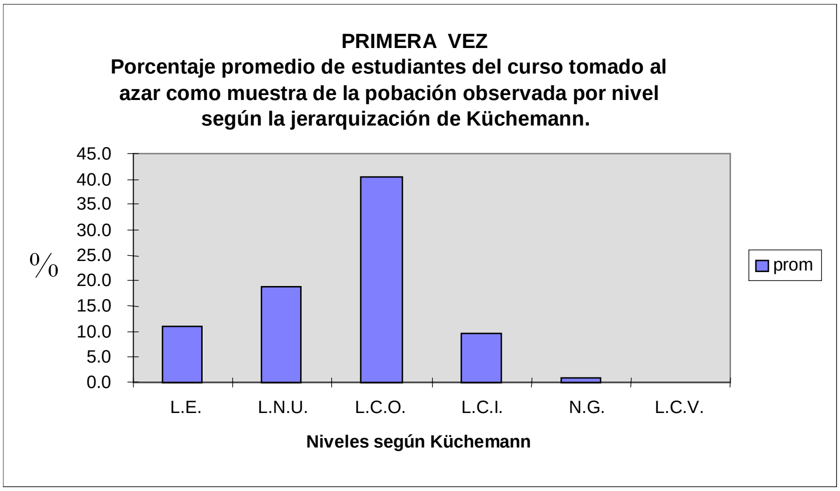


Gráfica1

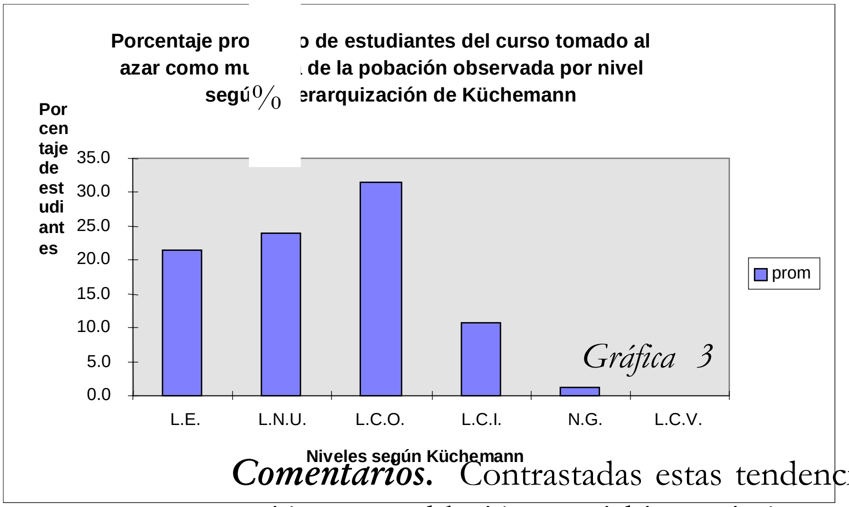
Puede observarse que la mayoría de estudiantes (cerca de un 70%) están en los niveles más bajos de interpretación de letra (evaluada, no usada o como objeto) y sólo un reducido número de ellos (15%) en los niveles superiores (como incógnita, número generalizado o variable). El porcentaje faltante (cerca del 15%), corresponde a estudiantes que por sus respuestas no pudieron ser clasificados respecto a sus interpretaciones de letra.

Ahora bien, particularizando al grupo de octavo grado al que se aplicó el cuestionario por segunda vez (uno de los seis grupos, escogido al azar), para observar las modificaciones surgidas como resultado del trabajo en álgebra durante los ocho primeros meses del año escolar, la interpretación que ellos hicieron de la letra aparece en las siguientes gráficas, correspondiendo la gráfica 2 a los resultados de la primera vez que se les aplicó el cuestionario (N=41), y la gráfica 3 a los de la segunda:

[19] Convenciones para leer las Gráficas:
L.E.: Letra evaluada
L.N.U.: Letra ignorada o no usada
L.C.O.: Letra como objeto
L.C.I.: Letra como incógnita
N.G.: Letra como número generalizado
L.C.V.: Letra como variable.



Gráfica 2



Gráfica 3

Comentarios. Contrastadas estas tendencias de interpretación se estableció que si bien existían cambios en ellas, como puede apreciarse en las gráficas, los mayores cambios se daban en el nivel de *letra como objeto* y en el número de estudiantes que ingresan a la clasificación (porque en la segunda vez más personas se atreven a contestar) y a los niveles más bajos de la jerarquía: *letra evaluada, letra ignorada (o no usada)*. Mientras que del nivel *letra como objeto* hay un desplazamiento hacia los otros; los porcentajes presentes tanto en *letra como incógnita, número generalizado o variable*, permanecen.

De la situación estudiada, y manifestada en las gráficas, se puede extraer los comentarios que a continuación se presentan:

- Es marcada la tendencia a evaluar la letra, ignorarla o verla como objeto; además de un trabajo erróneo en lo operativo. Las siguientes son algunas de las respuestas dadas por los estudiantes a las diferentes preguntas de la prueba mencionada anteriormente:

(1) $e+f+g=15$, pues $g=7$ (tomando la posición de la letra respecto al orden lexicográfico).
$e+f+g=15$, pues si $e+f=8$, entonces $e=3$ *y* $f=5$; así, g es el siguiente número primo, es decir, $g=7$.
$e+f+g=12$, pues si e+f es igual a ocho, cada letra vale cuatro.
$e+f+g=9$, pues g es 1 porque "no tiene número" (refiriéndose al coeficiente de g).
$e+f+g=8,9,10,...$, pues g puede ser cualquier número (en el universo de los naturales).

- Puede observarse que las tres primeras respuestas son manifestaciones de interpretación de la letra como *evaluada*, mientras que la cuarta corresponde a *no usada* y la última a la de *número generalizado.*

(2) $4 \cdot n+5 = n+20$
$4 \cdot n+5 = 20n$
$4.n+20=20$
$4(N+5) = 32$, pues *"N tiene tres palitos"* y entonces
$$4(3+5) = 4(8) = 32.$$

- En este caso, las tres primeras corresponden a *letra ignorada o no usada*, y la última a *letra evaluada.*

(3) *150y+200z* representa *150 manzanas y 200 peras.*
350 frutas.
Una manzana y una pera (refiriéndose a que para eso alcanza \$150 y \$200, respectivamente).

- En las dos primeras respuestas es clara la interpretación de cada una de las letras como *objeto* (las frutas). En la última, además de interpretarla como *objeto*, existe una cierta evaluación de la misma.

(4) L+M+N nunca es igual a L+P+N, pues M y P *son distintas.*
L+M+N siempre es igual a L+P+N*, cuando M y P tienen el mismo valor.*
L+M+N siempre es igual a L+P+N, pues *es una igualdad.*

- Se encuentran interpretaciones de letra como *objeto* (como parte constitutiva de un alfabeto) y como *incógnita específica* (podemos ver que "siempre", en este caso, coresponde a "algunas veces"). En la última respuesta, no se puede determinar qué interpretación se hace de la letra.

(5) *a+2* nunca es igual a *b+2*, pues a=1 y b=2.
a+2 nunca es igual a *b+2*, pues a y b son diferentes.

- Estas respuestas corresponden a interpretaciones de letra *evaluada* y letra como *objeto*, respectivamente.

(6) *a=(b+2)+3=b+5, entonces a=b+5* (no hace referencia sobre lo preguntado y cambia la relación inicial).

- A partir de lo escrito, resulta difícil caracterizar la interpretación de letra; sin embargo, en algunos cuestionarios, ésta correspondería a letra *no usada* (para lo cual se hace necesario tomar en cuenta lo respondido a las preguntas anteriores del cuestionario).

(7) *Queda* $f=5g+1=6g$
$f=3g+3$

- Desde el trabajo operativo con la letra, se puede afirmar que las respuestas corresponden a *letra no usada.*

- Con las manifestaciones anteriores, ¿qué posibilidades hay de que estos estudiantes le den un significado a las letras, en diferentes contextos matemáticos, que corresponda a los de incógnita, número generalizado o variable, necesarios para que el trabajo en álgebra tenga un sentido desde lo matemático?[20] .

- Los profesores de matemáticas, en particular los de secundaria, deberían considerar como necesidad para *ser maestros* de esta disciplina, el que cada uno de ellos cuente para su saber con el dado a partir de la investigación en educación matemática, aunque ineludiblemente, como parte de su saber, el relacionado con las interpretaciones de la letra, para *arriesgar formas de trabajo* mediante las cuales lograr un acercamiento mayor a la interpretación de la letra como variable matemática, al tomar ésta como pretensión deseable de interpretación.

- En relación con las perspectivas pedagógica y metodológica, puede decirse que la utilización de las letras para representar variación en un determinado universo, se vincula necesariamente con trabajos de tipo estructural conjuntista, que de acuerdo con el planteamiento de Sfard (1992), no son convenientes cuando se trata de la iniciación, al menos hasta tanto no se haya

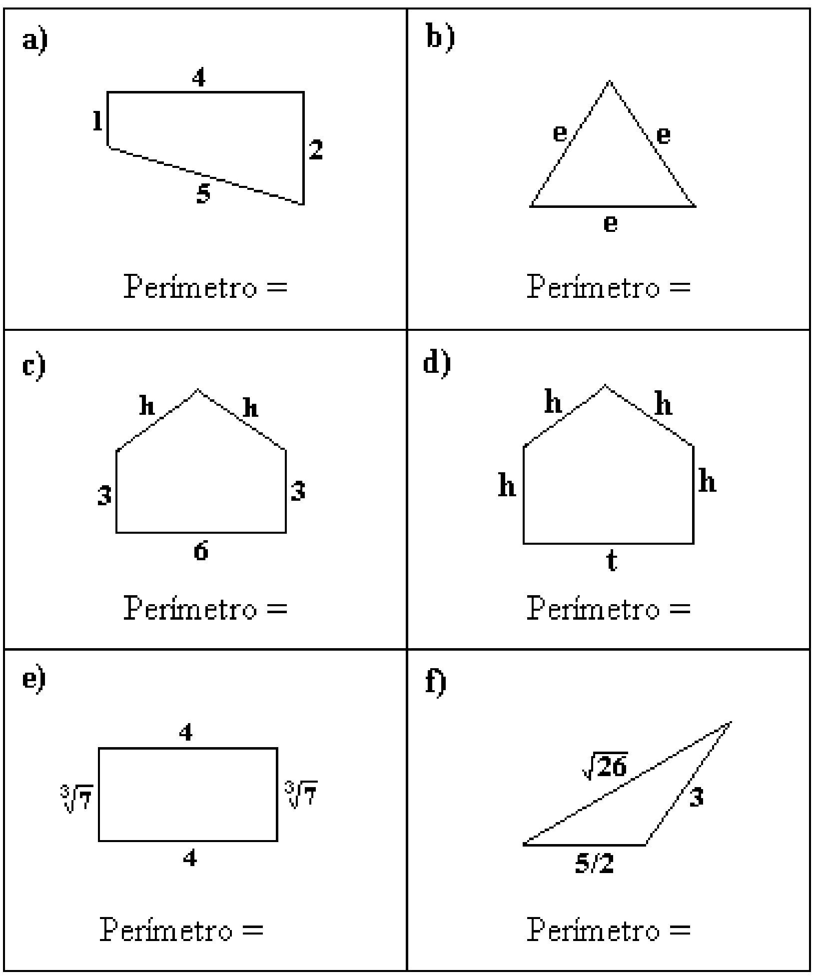
[20] Sin embargo, en las manifestaciones referidas se encuentra que los estudiantes, de una u otra manera, le dan siempre un significado a su trabajo en álgebra. Por esta razón, cuando desde los pronunciamientos de este escrito planteamos que los estudiantes ***no dotan de significado*** algún trabajo en matemáticas, no queremos decir que no se lo den, sólo que el significado dado, no es reconocido como asociable con la matemática.

adquirido una cierta madurez matemática, de algún concepto matemático, por cuanto en dichas iniciaciones priman en el aprendizaje representaciones mediadas por lo operacional, entendido como la necesidad de invocación de un proceso dado en el espacio y en el tiempo y a partir del cual se logra "*reificar*", dotar de significado puramente estructural al concepto y por tanto desvinculado totalmente de referencias espacio temporales.

3.4.2 Segundo cuestionario. Los resultados del primer cuestionario pueden ser considerados exagerados o no concluyentes, pues recordando el pronunciamiento inmediatamente anterior respecto de la necesidad de trabajo operacional, es posible argumentar que el cuestionario presentado no tiene un referente claro (por ejemplo geométrico) y no están contextualizadas sus preguntas. Por otra parte, en tanto las interpretaciones de la letra que poseen los estudiantes dependen de los universos de significación, aquellos universos a los que recurren para, consciente o inconscientemente, interpretar las letras de una determinada manera, resulta importante conocer cuáles son los universos a los que acude el estudiante y en cuáles puede trabajar comprensivamente. Además indagar sobre las posibilidades de trabajo ligado a procesos de generalización, búsqueda de regularidades y simbolización de las mismas.

Precisamente por el reconocimiento en el desarrollo de la investigación de la necesidad de contextualización para tener una información más fehaciente de las razones por las que los estudiantes interpretaban las letras como ya dijimos, se realizó y aplicó un segundo cuestionario, a través del cual indagar sobre los universos numéricos a los que fundamentalmente acudían los estudiantes, y, como elemento adicional, precisar un poco acerca de la interpretación de la letra. El texto del cuestionario es el que aparece a continuación, y fue trabajado por los estudiantes de seis grupos de grado octavo, en los tres colegios donde se desarrolló el estudio citado (N=256), en forma individual, durante un lapso de una hora aproximadamente.

1. El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados[21] . Halle el perímetro de cada uno de los siguientes polígonos:



[21] Si bien existe un "error" en el enunciado, en cuanto no se precisa que se suman las longitudes de los lados y no éstos, decidimos escribirlo así ya que era la manera en que muchos de los estudiantes se referían al perímetro (recuerden que el propósito de este cuestionario no es el de enseñar algún tema, sino indagar en relación con interpretaciones de letra en diferentes contextos).

2. La expresión **2W** significa 2 multiplicado por W.

   a) Asigne **un** valor a W para que **2W** sea igual a **2+W**
   Un valor de W es ____
   b) Asigne **dos** valores a W para que **2W** sea mayor que **2+W**
   Un valor de W es ____ y otro valor de W es ____
   c) Asigne **dos** valores a W para que **2W** sea menor que **2+W**
   Un valor de W es ____ y otro valor de W es ____
   d) Encuentre **todos** los valores posibles de **W**
   para los que **2W** sea menor que **2+W.**

3. Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas.

(1ª posición) (2ª posición) (3ª posición)

   a) Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición:
   b) Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición:
   c) Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100:
   d) Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior:
   e) Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición:

4. El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura .

   a) Escriba en el cuadro las medidas de la base y la altura de cinco rectángulos distintos cuya área sea 6 centímetros cuadrados[22].

[22] Esta pregunta consta de dos partes; en la primera, se puede trabajar de manera correcta multiplicativamente con números naturales, pero sin agotar los cinco ítemes propuestos, para lo cual deben recurrir a otros universos numéricos. En la segunda, se requiere, obligatoriamente, trabajar multiplicativamente por lo menos con múltiplos de $\sqrt{2}$.

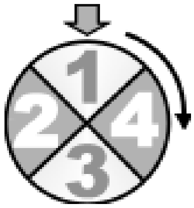
Rectángulo	Medida de la base	Medida de la altura
1º		
2º		
3º		
4º		
5º		

b) Escriba las medidas de la base y la altura de tres rectángulos distintos cuya área sea $3\sqrt{2}$.

Rectángulo	Medida de la base	Medida de la altura
1º		
2º		
3º		

5. Halle las medidas de las reglas de longitudes 3+h, sabiendo que h toma valores en el conjunto $\{\sqrt{7}, 2, \frac{1}{4}, -1, \pi\}$[23]. Las medidas son:

6. La rueda de la figura gira en el sentido indicado por la flecha, partiendo del número 1. Gana quien saque el número más alto (bajo la ⇩)[24].



(Gira en el sentido de la flecha)

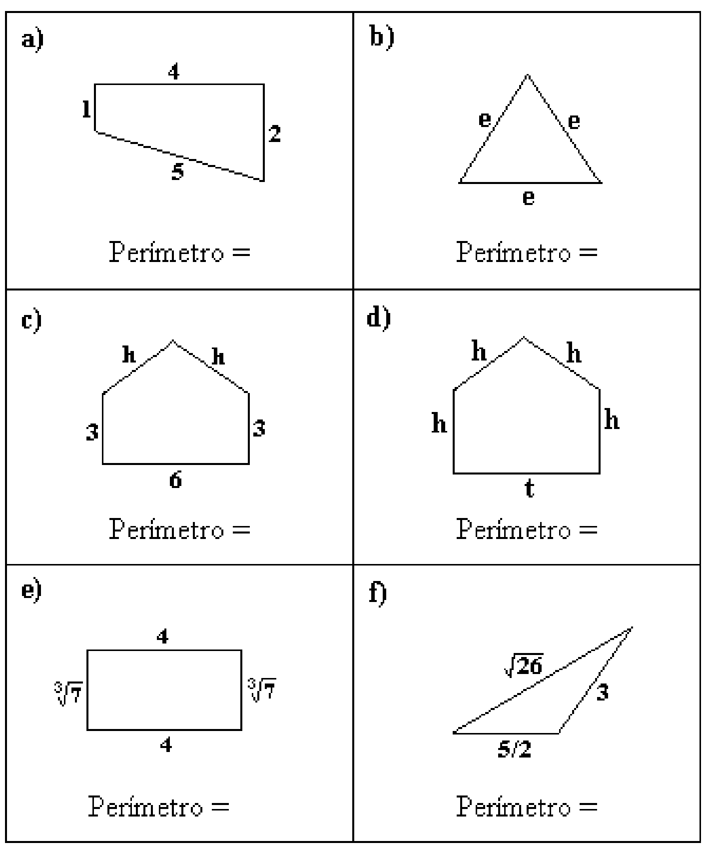
a) Un niño la hace girar, haciéndola avanzar 7 posiciones y una niña la hace girar avanzando 5 posiciones. ¿Quién ganó y con qué número?.
b) Un niño la hace girar, haciéndola avanzar 13 posiciones y una niña la hace girar avanzando 15 posiciones. ¿Quién ganó y con qué número?.

[23]Esta pregunta se plantea para observar el comportamiento de los estudiantes en un universo numérico, con un número finito de elementos, un poco extraños, dado explícitamente.
[24]Este problema, tanto desde el punto de vista de las operaciones que intervienen, como del número de soluciones que posee, es bastante difícil, sin embargo es un problema que los estudiantes enfrentan, más que otros que desde los puntos de vista anteriomente expuestos son más sencillos.

c) El niño la hace girar y avanza **n** posiciones y la niña la hace avanzar el doble de posiciones que él. ¿Pueden sacar el mismo número?. Explique su respuesta.

Análisis de algunas respuestas. Como elemento para el análisis, se considera importante presentar algunas de las respuestas dadas por los estudiantes a los anteriores ítemes, así como algunos comentarios generales, no sin antes mencionar que, en la mayoría de los casos, se encontraron cerca de 30 respuestas diferentes a cada uno de éstos. Este análisis se hará con cierto detalle para la primera pregunta, y de manera general para las preguntas tercera y cuarta.
En relación con la primera pregunta del cuestionario:

1. *El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados. Halle el perímetro de cada uno de los siguientes polígonos:*



1(a) Si bien la mayoría dio como respuesta 12 (asignándole de entrada el valor de 4 a cada letra), otros no contestaron o dieron respuestas como:

- *10,8 cm.*, no tomaron las medidas dadas en la figura, sino que midieron directamente con una regla y sumaron los datos obtenidos (nótese un trabajo desde lo perceptivo).

- *3 cm*, obtenidos al sumar los segmentos laterales, pues para algunos de ellos, los otros segmentos *no* son lados (en tanto uno está arriba y otro abajo,... , ¡no a los lados!).

1(b) De los estudiantes que tuvieron en cuenta el enunciado y contestaron bien el ítem anterior, tenemos respuestas como las siguientes:

- e , haciendo la aclaración que la expresión utilizada *no* es interpretada por los estudiantes como potencia (en 3 tanto no corresponde al producto *e.e.e*), sino como tres *e´*s (es decir, el exponente es visto como un *contador* del número de lados de longitud *e*).

- e^2, al igual que en el caso anterior, el exponente sirve para contar los lados que se sumaron, que en este caso no son 3 sino 2, pues el otro es la *base* y por tanto no es tomado como lado.

- *6 cm*, asignándole a cada letra un valor (letra evaluada), el cual posiblemente corresponda a una aproximación de la longitud del lado en la figura dada. En cuanto a evaluación de la letra, entre otras, encontramos respuestas como: *9 cm, 12 cm* ó *15cm.*

1(c) Habiendo contestado correctamente el primer ítem, lo cual muestra que tuvieron en cuenta el enunciado o que manejan el concepto de perímetro de un polígono, encontramos respuestas como:

- h^2+12
- $12\ h^2$
- $2h12$

Ahora bien, tomando como referencia las interpretaciones de letra utilizadas, así como el trabajo con las letras, podemos establecer los siguientes niveles en relación con las respuestas dadas a los cuatro primeros ítemes de la primera pregunta del cuestionario, es decir, los ítemes (a), (b), (c) y (d):

NIVEL 0: No responde.

NIVEL 1: No tuvo en cuenta el enunciado. Responde a) con valores distintos a 12.

NIVEL 2: Tiene en cuenta el enunciado pero evalúa o ignora la letra operando exclusivamente sobre lo numérico.

NIVEL 3: Tiene en cuenta el enunciado, no evalúa la letra, no la ignora, pero pega sin utilizar exponentes. Las respuestas son del tipo:
a) Perímetro=12 b) Perímetro=eee
c) Perímetro=12h2 d) Perímetro=hhhht

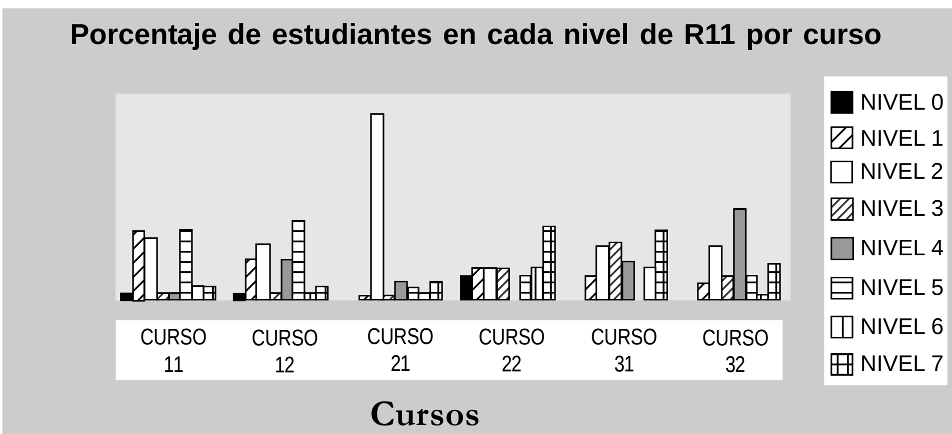
NIVEL 4: Tiene en cuenta el enunciado, no evalúa la letra, no la ignora, pero pega y utiliza exponentes. Las respuestas son del tipo:
a) Perímetro=12 b) Perímetro=e^3
c) Perímetro=$12h^2$ d) Perímetro=h^4t

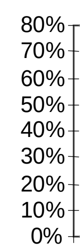
NIVEL 5: Tiene en cuenta el enunciado, no evalúa la letra, no la ignora, no pega y utiliza exponentes. Las respuestas son del tipo:
a) Perímetro=12 b) Perímetro=e^3
c) Perímetro=$12+h^2$ d) Perímetro=h^4+t

NIVEL 6: Tiene en cuenta el enunciado, no evalúa la letra, no la ignora, no pega, no utiliza exponentes y no cierra las operaciones. Las respuestas son del tipo:

a) Perímetro=12 b) Perímetro=e+e+e
c) Perímetro=12+h+h d) Perímetro=h+h+h+h+t

NIVEL 7: Tiene en cuenta el enunciado, no evalúa la letra, no la ignora, no pega, no utiliza exponentes y cierra las operaciones. Corrección compacta (simplifica al máximo posible usual y expresa correctamente). Las respuestas son del tipo:
a) Perímetro=12 b) Perímetro=3e
c) Perímetro=12+2h d) Perímetro=4h+t





Gráfica 4

En la gráfica anterior (R11: respuestas a la pregunta 1, parte primera), puede ubicarse tendencias de desempeño con la letra, involucrada dentro de un problema de carácter geométrico, en cada uno de los seis cursos de octavo grado, correspondientes a los tres colegios mencionados[25] (con un promedio de 44 estudiantes por curso). Los estudiantes de los cursos 11 y 12 (colegio 1), se acumulan en el nivel 5 (no evalúa la letra, no la ignora, no pega y utiliza notación con «exponentes»), además son los cursos que más aportan a este nivel. Los estudiantes de los cursos 22 (colegio 2), 31 y

[25] Los seis cursos estaban distribuídos así: 11 y 12 a cargo de un mismo profesor (profesor 1), 21 a cargo de otro profesor (profesor 2), 22 a cargo de otro profesor (profesor 3) y los grupos 31 y 32 a cargo de un profesor (profesor 4).

32 (colegio 3) aportan mayor porcentaje al nivel 7 (corrección compacta).

> **Comentario.** En tanto el trabajo realizado por los estudiantes puede estar «direccionado» en buena parte por el tratamiento metodológico dado por el profesor, se considera importante sintetizar cómo fue abordado el trabajo en el aula por cada uno de éstos durante el primer semestre del año escolar (periodo en el cual se realizó el trabajo de observación): El profesor 1 presenta el álgebra algorítmicamente, con ejemplos dados, tratando de formar sentido a través del habla, y por analogías con situaciones cotidianas (por ejemplo, con el modelo de la balanza en el tratamiento de las ecuaciones, aunque rápidamente lo abandona); el profesor 2 presenta el álgebra algorítmicamente, centrándose en la expansión del universo numérico natural, sin trabajo sintáctico dirigido al álgebra, aunque utiliza traducción de enunciados en castellano a lenguaje algebráico; el profesor 3 también hace una presentación algorítmica del álgebra, partiendo de los algoritmos usuales en aritmética, y usando modelos interpretativos en el trabajo con la letra, aunque manteniéndolos aislados: uno, originado en el sistema decimal con números naturales, haciendo explícita la base diez y generalizando abruptamente, básicamente desde lo sintáctico, otro, usando figuras geométricas (cálculo de perímetros y áreas) como pretexto para encontrar equivalencias de expresiones algebraicas; el profesor 4 presentó el álgebra de una manera formal, con ejemplos dados.

Con respecto a los dos últimos ítemes de la primera pregunta, es decir, (e) y (f), se tienen los siguientes niveles, que reflejan posibles dificultades en el trabajo con algunos universos numéricos (particularmente con racionales e irracionales[26]):

[26] Si bien los racionales, en general, se reconocen como números, se manifiesta una gran dificultad o rechazo a operar con ellos. En relación con los irracionales, consideramos importante mencionar que expresiones como $\sqrt{3}$ no suelen ser consideradas por los estudiantes como números, pues para algunos de ellos la expresión refiere a cierta «acción» sobre el número 3 que lo transforma en 1.73, expresión que sí es reconocida como número. En este sentido, vale la pena mencionar la similitud entre las interpretaciones dadas a las letras y las dadas a expresiones radicales; por ejemplo, $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ suele ser interpretada como $\sqrt{6}$ o como 6 (se reconoce el símbolo del radical pero no se usa, o simplemente se ignora). Esta temática puede ser de interés para otros trabajos de investigación.

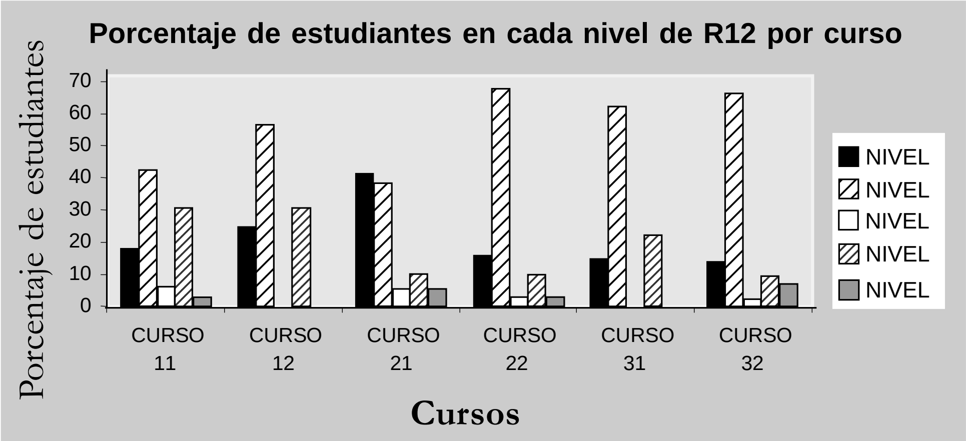
NIVEL 0: No responde ninguna.

NIVEL 1: Ignora o no usa el radical[27] en alguna de las contestadas o aproxima con un error mayor que 1.
(e) p = 4+4+7+7 = 22 (ignora el radical)
p = 4+4+3,5+3,5 = 15
(f) p = 26+(5+3)/2=30
p = 13+2,5+3=18,5

NIVEL 2: Aproxima cercano (error menor que 1) y no ignora el radical
(e) p = 2(4+2) = 2(6) = 12
(f) p = 5+2,5+3 = 10,5

NIVEL 3: Reconoce el radical, no lo aproxima, opera con él, pero no tiene corrección compacta (en cuanto no simplifica los términos).

NIVEL 4: Tiene corrección compacta (expresa en lenguaje algebraico y simplifica).



Gráfica 5

En la gráfica anterior (R12: respuestas a la pregunta 1, segunda parte), puede apreciarse cómo la mayoría de los estudiantes (más del 70%) se encuentra en los niveles 0 ó 1 (o

[27] Se usa la expresión radical ignorado o no usado en el mismo sentido que se usa la expresión letra ignorada o no usada.

bien no contestan, o ignoran el radical, o a lo más aproximan con un error grande). Sólo un número reducido de estudiantes reconoce el radical y opera con él, aunque pocos tienen correción compacta.

En relación con la tercera pregunta del cuestionario:

3. Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas.

(1ª posición) (2ª posición) (3ª posición)

a) Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición.
b) Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición.
c) Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100.
c) Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.
e) Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

y tomando como referencia las respuestas dadas por los estudiantes, se pueden establecer los siguientes niveles:

NIVEL 0: No responde.

NIVEL 1: No alcanza a encontrar el patrón de formación en lo perceptual.

NIVEL 2: Encuentra el patrón de formación únicamente en lo perceptual, es decir, contesta adecuadamente el literal (a).

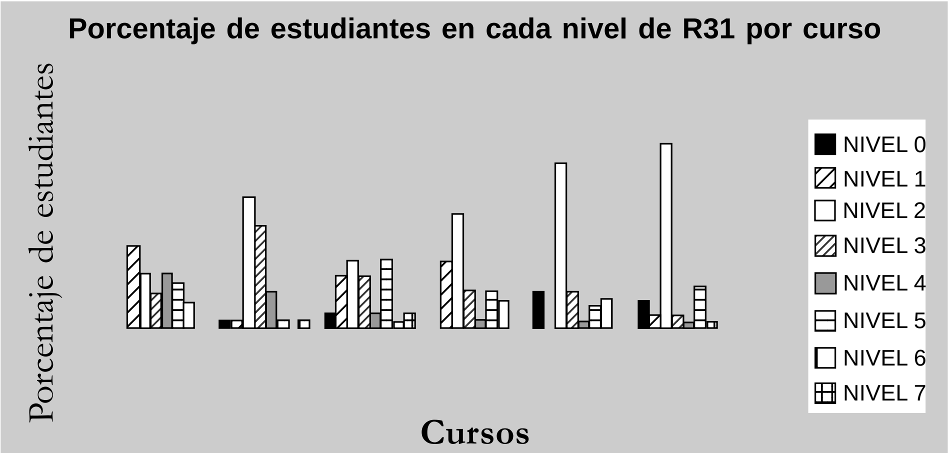
NIVEL 3: Encuentra el patrón de formación únicamente sobre lo concreto finito, es decir, para una posición dada (número pequeño). Contesta adecuadamente (a) y (b).

NIVEL 4: Encuentra el patrón de formación hasta lo concreto generalizado, es decir, para una posición dada (número grande). Contesta adecuadamente (a), (b) y (c).

NIVEL 5: Encuentra el patrón de formación general y llega sólo a verbalizarlo.

NIVEL 6: Encuentra el patrón de formación general, lo verbaliza y simboliza en *lenguaje intermedio*, es decir, con una simbología "propia", pero no con el lenguaje algebraico formal.

NIVEL 7: Encuentra el patrón de formación general, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal.



Gráfica 6

Con base en la gráfica anterior, es importante destacar cómo la mayoría de estudiantes trabajó esta pregunta, pues sólo un reducido número de ellos, correspondiente a los cursos 12 (profesor 1), 21 (profesor 2), 31 y 32 (profesor 4), dejó de responder (cerca al 10%). Sin embargo, resulta significativo el porcentaje de estudiantes de los diferentes cursos que encuentra un patrón de formación sólo en lo perceptual (40% en promedio). El porcentaje de estudiantes en el nivel 4 o superior es cercano al 25%, aunque menos del 2% de ellos llega al nivel 7 (encuentra patrón de formación en lo general y simboliza en lenguaje algebraico). En particular, en los cursos 11 (profesor 1), 22 (profesor 3), 31 y 32 (profesor 4) no se encontraron estudiantes en el nivel 7.

En varias de las respuestas dadas por los estudiantes al ítem (c), se refleja el reconocimiento de la «potencia» de la proporcionalidad, en el sentido que ella concibe una relación que se conserva, pero también el desconocimiento de la linealidad de la proporción. Una manifestación de esto, lo constituye el hecho de que, una vez encontrado el patrón de formación en lo concreto finito (para la posición 9), hallan un entero con el cual «medir» para el caso de 100; así, una vez encuentran que para la posición 10 hay 19 cuadros, asumen una regla de la proporción (directa) y multiplican por 10, considerando que éste es el número de cuadros en la posición 100.

Por otra parte, resulta importante destacar la simbolización presente en las respuestas de los estudiantes, que constituyen *modelos intermedios de representación* -respecto del lenguaje algebraico formal-, los cuales, valga decir, son ignorados por el profesor, perdiéndose una opción de trabajo, de origen, más cercana no sólo a los estudiantes que proponen dichos modelos sino al resto de sus compañeros, pues tales modelos ayudarían en el tránsito de la formulación verbal de situaciones matematizables, a la simbolización matemática propiamente dicha (Kieran, 1989). En este sentido, desde la propuesta de Sfard (1992), dichas formas de representación son manifestaciones que hacen los estudiantes de las nociones de variable y función, que se constituyen en "puentes" entre manifestaciones de tales objetos como *procesos*[28] y como *entidades condensadas*, fases necesarias para la construcción de las nociones matemáticas, que hacen parte de un proceso en el que la operatividad juega un papel fundamental, reconociendo que el ser humano por su naturaleza, construye mundo a partir de su accionar, su operar, con el mundo mismo, y por tanto es sólo así que el estudiante puede lograr, como ella lo llama, *la reificación* de las nociones matemáticas.

Ahora bien, en relación con la pregunta 4, en la cual se pide encontrar las medidas de cinco rectángulos cuya área sea 6 centímetros cuadrados, resulta importante comentar que la mayoría de los estudiantes encuentran medidas sólo en el universo de los naturales (dando respuestas como 1 y 6; 6 y 1; 2 y 3; 3 y 2), pero en su mayoría no acuden a las fracciones o decimales para encontrar otra posibilidad (es decir, sólo plantean cuatro opciones diferentes). Más aún, algunos de los que presentan cinco opciones dan respuestas como –2 y -3, olvidando el contexto del problema y "lanzándose" únicamente a encontrar dos números cuyo producto sea 6.

El análisis de las respuestas a este cuestionario, desarrollado en el marco de la investigación que se viene refiriendo, resultado de un trabajo de cruzamiento de la información obtenida a partir de la observación de aula, cuadernos de campo y entrevistas, posibilitó ubicar algunas causas de incomprensión de la noción de variable en matemáticas, de

[28] SFARD propone una teoría, según la cual, la construcción de los objetos matemáticos pasa, obligadamente, por tres fases: el objeto como *proceso* (por ejemplo, número como conteo), como *condensación* , o síntesis de los procesos (por ejemplo, conteo y orden en número natural, que refiere cantidad) y el objeto *reificado*, es decir, un objeto al que se le adjudica existencia propia, independiente del sujeto que lo construye (por ejemplo, el objeto número natural).

las cuales se comenta aquí las que tienen relación directa con los niveles de interpretación de la letra.

La alusión a las necesidades para la comprensión de un discurso, en particular de aquel cuyo objeto es la variable en matemáticas, y la complejidad manifiesta en lo que refiere la enseñanza y el aprendizaje de la noción de variable en matemáticas, hace indispensable poner en consideración, justamente para la mejor comprensión de las causas de incomprensión presentadas aquí, en primer lugar, tal vez lo más fundamental en ella: la noción de variable (cuya caracterización se presenta en la siguiente sección), y en segundo lugar una explicitación, propuesta por Usiskin (1980), de las formas como puede ser entendida el álgebra, y las interpretaciones de la letra que a esas formas se asocian (entendida como las interpretaciones "mínimas" requeridas para trabajar con éxito bajo dicha concepción):

CONCEPCIÓN DE ÁLGEBRA	**USO DE LA LETRA**	**DESTREZAS ASOCIADAS**
Aritmética generalizada	Patrones generalizadores (Letra como objeto)	Traducir y generalizar (relaciones entre números)
Estudio de procedimientos para resolver problemas	Incógnitas	Simplificar y resolver
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros (Letra como número generalizado, o como variable)	Relacionar, tabular, graficar
Estudio de estructuras	Objetos arbitrarios	Manipular, justificar

Por último, se considera importante destacar aquí que la imagen de álgebra como aritmética generalizada (implícitamente presentada en algunos textos escolares y trabajada por algunos maestros), no garantiza interpretaciones de la letra como número generalizado, en tanto el uso de las letras como modelos o patrones generalizadores puede asociarse con interpretaciones de éstas como objetos –como una manera de nombrar–, sin que necesariamente se les reconozca su carácter operativo, en tanto representantes de números en un cierto universo; en tal sentido, las posibilidades de interpretación de la letra como número generalizado depende, en gran medida, del tratamiento metodológico dado. En relación con los planteamientos de Küchemann, y particularmente con la caracterización que propone de variable, puede inferirse que para él la imagen deseable del álgebra escolar está asociada a la de *álgebra como estudio de relaciones entre cantidades*.

3.4.3 Una caracterización de la noción de variable. A continuación se presenta una reflexión en torno a aquello que se conceptualiza bajo el nombre de *variable*.

La noción de variable irrumpe definitivamente en el escenario matemático con el advenimiento del análisis infinitesimal o lo que ahora se conoce genéricamente como cálculo, aunque ya en tiempos de Descartes, su método analítico permite un enorme avance en el uso de la letra respecto de los algebristas del renacimiento, para quienes, desde la perspectiva küchemanniana, era asimilada a incógnita específica. En efecto, Descartes transciende esta alusión a lo desconocido fijo, al utilizar la letra como representación general de las múltiples particularidades de un universo, pues, nuevamente, desde Küchemann, la letra es usada como número generalizado. Dice Descartes:

> *"Y notando luego que para entender esas relaciones unas veces tenía que considerarlas una por una, mientras que otras veces era necesario pensarlas o abarcarlas todas juntas, pensé que, para mejor considerarlas individualmente, debía contemplarlas como relaciones entre líneas rectas...; por otra parte, que, con objeto de retenerlas en la memoria o de abarcarlas todas juntas, debía expresar esas relaciones, mediante ciertos caracteres lo más simples posible. De este modo, pensé que podía tomar prestado lo mejor del análisis geométrico y del álgebra..."*[29]

Posteriormente, en la aplicación de los resultados de Descartes al estudio de problemas sobre el movimiento, Leibniz y Newton introducen expresiones como «"infinitamente pequeño", "incrementos evanescentes", "cantidades que se desprecian", "sucesiones infinitas"»[30], con las cuales, además de referir la generalidad puntual, pretenden rescatar esa suerte de "pegamento" apreciable en el cambio, que por ocurrir en el tiempo, permite, por decirlo de alguna manera, guardar memoria del pasado "inmediato" como forma sensible de constatar el cambio.

Como resultado del desarrollo de la teoría que estudia tales fenómenos, y que paulatinamente se independiza de ellos, el cálculo infinitesimal, la referencia de esas expresiones citadas, se decanta y consolida en dos, que se vuelven fundamentales para la teoría: variable y función, aunque sin una diferenciación precisa, como puede reconocerse a partir de dos pronunciamientos que se traen a colación, con la intención no tanto de aclarar la diferencia anotada, como de aproximar una caracterización para la noción de variable.

---

[29] Citado por PHILIP, J. (1985). *La naturaleza de las matemáticas*. En: Sigma: El mundo de las matemáticas, vol. 1. Barcelona: Grijalbo. p. 360.
[30] BABINI, J. (1971). *El cálculo infinitesimal. Leibniz/Newton*. Buenos Aires: Universitaria. p. 9.

El primero, de Lakatos, quien a propósito de problematizar lo que llama la

> *"historiografía justificacionista [de la que afirma ser su] dogma básico: reconstruir la historia como una mezcla de galimatías sin sentido y de desarrollo continuo hacia las teorías actuales [el cual] dejaría ciego al historiador para el patrón dialéctico real (i.e. crítico) del progreso histórico que consiste en conjeturas, pruebas y refutaciones, y en la lucha de teorías competitivas"* [31]

plantea cómo, desde esta posición, se pretende colocar a Cauchy como un precursor de Weierstrass, en cuanto para el primero la variable sería una mera manera de hablar, lo cual permitiría referir los infinitesimales como acto, no como posibilidad (la vieja historia de la distinción entre infinito actual e infinito potencial), es decir, la consideración de los reales no estandar como objetos matemáticos. Plantea en contra Lakatos (p.85-86) que ello es insostenible, pues

> *"El continuo de Cauchy (tal vez a diferencia del de Leibniz) no es un conjunto de puntos actuales, sino un conjunto de puntos que se mueven. Sus «variables» no son «variables» weierstrassianas; éstas últimas pueden eliminarse sin ninguna pérdida ya que la teoría de Weierstrass del movimiento explica el movimiento, el cambio y las variables en términos de un álgebra infinitista de cantidades actuales: este es uno de sus logros más importantes. No así la teoría de Cauchy, donde la «cantidad variable» no es simplemente una manera de hablar, sino una parte vital de la teoría. El «punto» en el que Cauchy muestra que*

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \ldots$$

[31] LAKATOS, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza Universidad. p. 83.

> *no converge, es un punto en movimiento $x=(1/n)$, donde $n \to \infty$. [...] Pero entonces, «en todas partes» no significa, en el teorema de Cauchy, «en todos los puntos, ya sean estándar o no estándar», como interpretaría* Robinson, *sino «en todos los puntos estándar y en todos los puntos que se mueven more Cauchy». Así pues, el continuo de Cauchy es un conjunto más bien «dinámico».*

En otras palabras, podría decirse que la variable en Cauchy es un objeto de la matemática, sólo en tanto ella corresponde, o es, una sucesión, lo cual a la luz de la matemática contemporánea no puede ser aceptado, ya que los números reales, estándar o no estándar, son entidades estáticas, invariables, lo cual aparece claramente expuesto en el segundo pronunciamiento atrás anunciado, el cual se debe ahora a Frege.

En efecto, Frege, queriendo precisar lo que es una función, apunta que hay

> *"...un uso lingüístico vacilante en el hecho de que unas veces se llama función lo que determina el modo de dependencia o quizás el propio modo de dependencia, mientras que otras veces se llama así a la variable dependiente. [Y que] En tiempos recientes predomina en las definiciones la palabra "variable". Pero ésta se halla así mismo muy necesitada de aclaración."*[32]

lo cual se dedica a problematizar, partiendo de que la variación se da en el tiempo, que por estar "fuera de toda consideración" en el análisis, hace que pensar la variable como objeto suyo, puede ser sólo a condición de "que no entrañe nada ajeno a la aritmética". Para cumplir tal condición, Frege (p.176) se pregunta qué es lo que varía, y al darse como respuesta que una magnitud, la lleva al fracaso pues

[32] FREGE, G. (1985). *Estudios sobre semántica.* Buenos Aires: Orbis. p. 175.

> *"... ni magnitudes de longitud, ni magnitudes de superficie, ni magnitudes de ángulos, ni magnitudes de masas son objetos de la aritmética. De todas las magnitudes, únicamente los números le pertenecen. Y precisamente porque esta ciencia descuida totalmente la cuestión de cuáles son las magnitudes que, medidas, dan lugar a los números en los casos concretos, es apta para las aplicaciones más diversas. Así, pues, nos preguntamos: ¿Son las variables del análisis números variables? ¿Qué otra cosa podrían ser, si es que han de pertenecer al análisis?.*

y se pregunta, a continuación, si hay números variables; pero también lleva al fracaso sus respuestas, pues las posibles referencias para esta expresión lo son, en tanto se adicione el tiempo, como en el ejemplo "el número que da en milímetros la longitud de esta vara [que por cambios de temperatura puede estar variando, así mismo el número asociado a su longitud] ", se refiere a algún número sólo si ese número se le hace corresponder a la vara en un determinado momento, así que, concluye, además porque nada permanece cuando varía, que no hay "números variables, y esto queda confirmado por el hecho de que no tenemos nombres propios para números variables", llegando aún más lejos al afirmar que

> *"Con respecto a las variables, hemos llegado al resultado siguiente. Pueden admitirse magnitudes variables, ciertamente, pero no pertenecen al análisis puro. Números variables no existen. La palabra "variable" no tiene, por tanto, en el análisis puro, justificación alguna." (p.181).*

Lo escrito hasta este momento, si bien definitivamente muestra que la noción de variable es algo de ponerle atención, por la importancia que tiene en la matemática, a pesar de no ser, como afirma Frege, un objeto del análisis, y seguramente ha logrado puntualizar ciertos aspectos vinculados con esta noción, requiere aún un esfuerzo hacia su caracterización, en tanto ella está presente en toda la matemática, no sólo en el análisis. Por ello se plantea a continuación una elaboración teórica hacia la búsqueda de esta caracterización.

Una tendencia del trabajo matemático (como ejemplo, hágase una lectura entre líneas de la posición de Frege), podría decirse incluso, una pretensión, es "capturar" aquello de la realidad en lo que podría radicar la estructura conceptual de los fenómenos, es decir, lo que desde el entendimiento los hace ser. Por ello el carácter abstracto de las matemáticas: despoja a los fenómenos de su mundanidad, quedándose tan sólo con su estructura, al tiempo que hace de ésta algo en sí mismo (por ello la posibilidad de hablar de *objetos matemáticos)* carente de contenido, aunque abierto a la posibilidad de contener, explicándolo, tanto a los fenómenos que pudieron inspirarlo, como a todo aquel que se le adecúe en adelante. Ejemplo de ello son, entre todos los demás conceptos de las matemáticas, las nociones de abierto y cerrado, para no ir tan lejos, y la que es aquí motivo de preocupación didáctica: *la variable*.

Es precisamente el cambio, el pasar de un estado a otro, bien manteniendo la naturaleza primera, bien abandonándola, lo que la variable en matemáticas pretende capturar, así que referirse al cambio, a la variación, puede aclarar esta problemática noción.

> *¿ Cómo asir algo que cuando tengo*
> *entre las manos ha dejado de serlo ?*[33]*,*

[33] Aquí se hace referencia a las situaciones de cambio permanente, continuo, donde más naturalmente se lo reconoce. Por ello es tal vez no recomendable, en las etapas iniciales de aprendizaje de la noción de variable, tratarla en contextos discretos.

es una pregunta que como respuesta tiene un "de ninguna manera", si ese "algo" se encuentra en la materialidad. Pero, si por el contrario, ocurre en el mundo de los conceptos, tal vez sea posible mediante una acción mental, asirlo, efectuando una reducción que, refiriendo la estaticidad, esta sí asible, englobe la totalidad cambiante.

En este punto es ilustrativo invocar -ejemplo de la aludida reducción como proceder metodológico para entender qué es aquello, estructuralmente hablando, que hace ser al cambio- la preocupación de Bachelard por capturar la "esencia" del tiempo, ejemplo por antonomasia de variación, de cambio.

> *"Pero en nuestra impotencia por encontrar en nosotros mismos esas grandes líneas lisas, esos grandes rasgos simples mediante los cuales el impulso vital debe dibujar el devenir, de manera enteramente natural nos veíamos inducidos a buscar la homogeneidad de la duración limitándonos a fragmentos cada vez menos extensos. Pero siempre era el mismo fracaso: ¡la duración no se limitaba a durar sino que vivía! Por pequeño que fuera el fragmento considerado, bastaba un examen microscópico para leer en él una multiplicidad de acaecimientos; siempre bordados, nunca la tela; siempre sombras y reflejos en el espejo móvil del río, nunca la corriente límpida."* [34]

Bachelard resuelve el problema pulverizando la duración, es decir, optando por darle realidad al tiempo en cuanto *instante,* y dejando a la *duración* el papel de sustrato construido por el instante para su devenir, gracias a un "pegamento" constituido alrededor del "hábito", lo cual muy bien puede ser llevado a la matemática, si entendemos el número real, cada número real, como instante, la duración como

[34] BACHELARD, G. (1987). *La intuición del instante.* México: Breviarios del Fondo de Cultura Económica. p.30.

intervalo, y el pegamento, el "hábito" del que habla Bachelard, como la densidad de los números reales. Así podría entenderse la reducción que, recurriendo a la estaticidad del número particular, logra no perder de vista la totalidad cambiante.

Pues bien, siguiendo con la idea orientadora, cuando nos enfrentamos a un fenómeno cambiante, la salida que daría origen a la noción de variable en matemática, es *pulverizar* el fenómeno en sus distintas ocurrencias, en sus distintas posibilidades de ser, y hacer de ellas, miradas como totalidad, universo para su ocurrencia; universo por el cual, en tanto les dio vida -pulverizamos el fenómeno-, en tanto él constituye manifestación macro, pueden ser consideradas sus distintas posibilidades de ser, es decir, estas distintas posibilidades, no tienen sentido al margen del fenómeno como totalidad, así que, entonces, aparecen dos características para el cambio: que **hay una multiplicidad de ocurrencias mediante las cuales constatarlo**, y que tienen sentido, las ocurrencias, por cuanto **existe un universo de posibilidades donde ubicarlas.** Así, cuando se dice que **algo varía**, no puede desconocerse que **varía en alguna parte, en un universo;** y que se **entiende por variar, el hecho de poder ser, indistintamente, cualquiera de las posibilidades de ser en ese universo**[35].

Sin embargo, en lo que va, no se ha ido más allá de la estatización. Se "fotografió" el cambio, para decirlo con una metáfora, en cada uno de sus instantes, pero la idea de mo-

[35] De acuerdo con el desarrollo de la idea hasta este momento, y ligando un poco con la perspectiva puramente matemática, puede decirse que la interpretación de la letra como *número generalizado*, es la correspondiente a esas distintas ocurrencias, pues de la pulverización queda tan sólo granos separados, sin relación alguna, como cuando se dice, "x es un número natural". Sin embargo, puesto que interpretar la letra como número generalizado es ya un buen acercamiento a la noción de variable, pueden utilizarse universos discretos para, a partir del trabajo en éstos, liberar el concepto de variable de la referencia a los continuos, que no le son necesarios.

vilidad aún permanece a la espera del pegamento mediante el cual fluir. Así que para no sucumbir ante el peligro de la estatización, se debe recordar que si bien esos momentos del cambio pueden ser vistos, para efectos de análisis, como hechos aislados, estáticos, no puede desconocerse que el cambio es cambio en tanto se reconozca, es decir, en tanto a *cada momento le da evidencia la diferencia de ocurrencias, el saber cierto que ahora no es lo mismo, por cuanto en otro momento no es lo mismo que ahora*. Lo que se está diciendo, entonces, corresponde a dos características más del cambio: la tercera, que **sus momentos están en estrecha relación de interdependencia, se cambia siempre en relación con, nunca al margen,** por esto la confusión que anotara Frege entre variable y función, la tan conocida letra "**x**", aislada, sólo referida a su "universo de variación", no representa de manera alguna el cambio, únicamente ocurrencias que aunque generales, estáticas. El cambio aparece cuando se consideran relaciones de dependencia como las representadas por expresiones de la forma $y = f$. La cuarta, que **existe un sustrato donde el cambio mismo se da, constituido por el tiempo**, y en esta medida, la relación de dependencia expresada por la relación funcional atrás mencionada, constituye el pegamento que permite expresar el cambio ocurrido, "**y**", en el momento "**x**".

En este punto, pareciera que no hay diferencia con la situación planteada de estaticidad de la letra x referida a su "universo de variación", pues podría decirse que también, "**y**" es un instante del cambio, y cierto es. Sin embargo, retomando la acción mental de tomar estos instantes como totalidad, por la situación de dependencia establecida, se posibilita el no perder, el no olvidar el transcurrir de esas distintas ocurrencias en el tiempo, por eso su importancia como sustrato.

Ahora bien, para traer la reflexión realizada, al terreno propio de esta investigación (PRETEXTO, 1996): la matemática escolar, particularmente el álgebra escolar, es necesario relacionarla con tres aspectos: los invariantes en la comunicación matemática, las distintas formas de interpretar la letra en contextos matemáticos, en tanto la utilización de las letras ligada con la noción de variación, y, el carácter ontológico de eso llamado variable.

Para la comunicación en la matemática escolar, cuando desde la posición de profesor se le quiere “poner en escena”, se debe considerar que

> *El significado del constructo matemático, o más radicalmente, el objeto matemático mismo, es construido a trozos y progresivamente por el sujeto mediante múltiples procedimientos operacionales que lo involucran, en términos de los distintos usos, interpretaciones que de ellos tenga en un momento dado. Usos que tienen sentido, en tanto se corresponden con una estructura, que también es la que el sujeto ha construido en ese momento, a partir de las situaciones ejemplarizantes con las que se ha encontrado.*

> *La necesidad de un modelo acorde con los saberes constituidos en el sujeto, para lograr interpretar un constructo más formalizado.*

Para posibilitar la construcción de un objeto matemático, que si bien engloba, también rompe lo ya constituido, es necesaria su ubicación como formando parte de una totalidad matemática que le de sentido. Se requiere, pues, de una actitud tematizante que toca los terrenos de la epistemología y la metamatemática, como prácticas, no como referencia enciclopédica necesaria.

y ello podría aplicarse directamente a la noción de variable, si a ella se le pudiera adjudicar el calificativo de objeto matemático, lo cual, como ya se insinuó, a partir de la exposición de la posición fregeana, no es posible en el contexto del análisis, por cuanto, como ya se dijo, con las palabras ***objeto matemático*** se referirá un constructo humano, que además, es independiente del espacio y del tiempo, en el sentido que está más allá de la realidad sensible y que, por último, constituye parte de alguna de las teorías matemáticas presentes en un momento dado.

Sin embargo, en tanto la variable es parte constitutiva del discurso matemático, y definitivamente, a la manera de los objetos matemáticos, es independizable del espacio por cuanto su uso en matemáticas los refiere como entes estáticos, es posible llevar a cabo un "juego" con el entendimiento, para poder considerar, actitudinalmente, la aplicación de tales invariantes en los procesos de construcción de la noción de variable en matemáticas.

En efecto, la variable, como hecho gramatical *no* puramente sintáctico de la matemática, en el uso, es decir, en el ejercicio disciplinar y escolar, lleva implícitas cuatro características, correspondientes a las asociadas a la variación:

- La variable pertenece siempre a un universo, y desde él debe ser interpretada.

- El significado de variar que se le adjudica a la variable, corresponde al hecho que ella es representación, indistinta y simultánea, de los distintos individuos que conforman su universo.

- Aparece siempre haciendo parte de una expresión, que da cuenta de la relación de dependencia que se desea destacar entre los individuos de su universo.

- El universo al que pertenece la variable, sin ser tiempo, está implícitamente connotado de éste. En otras palabras, el tiempo se imbrica al universo de la variable, ajustándose a su cardinalidad y a su estructura.

Lo cual se traduce en que, por las tres primeras, la semántica de variable, es decir, el disponer de un "mundo objetual" compartido en el cual se encuentra referencia, a través del cual se da sentido, significado, radica en objetos matemáticos, y en este sentido, ella puede, como representación, constituirse objeto matemático, en el mismo sentido que los nombres del lenguaje ordinario, como representación, se constituyen objetos; en otras palabras,

> *"Como el griego afirma en el cratilo*
> *si el nombre es arquetipo de la cosa,*
> *en el nombre de rosa está la rosa*
> *y todo el Nilo en la palabra Nilo"*[36].

Superada la dificultad para la aplicabilidad de los invariantes a la construcción de la noción de variable, queda por resol-

[36] BORGES, J. (1971). *Nueva antología personal.* Siglo XXI. p. 26.

ver la posibilidad de aplicación; es decir, habría que establecer cuáles son esos "trozos" que se van construyendo progresivamente, y si existe también la posibilidad de "modelos" acordes con los saberes constituidos para lograr interpretar constructos más formalizados. La aplicación del tercer invariante, ya está mostrada de hecho con la solución dada al problema de la aplicabilidad. Sin embargo, puede aducirse que ello constituye un ejemplo de aplicación, pero no muestra cómo este invariante puede ser usado en el trabajo de aula, en cuanto el ejemplo aducido no ocurre allí, en el aula. Responder este autocuestionamiento, con propuestas generales, tal vez no sea posible, pues ello depende de las situaciones y momentos particulares. Pero baste por el momento otro ejemplo que aparecería como necesario para tematizar, desde la perspectiva epistemológica y metamatemática, la noción de variable: La reflexión adelantada en torno a la variación.

3.4.4 Algunas conclusiones en relación con los niveles de interpretación de la letra. La perspectiva teórica de este estudio exigió buscar, en relación con la noción de variable en matemáticas, *trozos progresivos*[37] que hicieran posible su construcción. A través del trabajo de observación, se encontró que las interpretaciones de la letra propuestas por Küchemann, lejos de ser errores –como fueron asimiladas, al inicio de la investigación, las correspondientes a letra evaluada, ignorada o no usada y objeto– constituían justamente trozos progresivos, que aparecen como necesidad, epistémica y psicológica, en el camino para su construcción:

[37] La idea de trozos, no pretende, de manera alguna, significar esta palabra en el sentido de pedazos inconexos que "sumados", constituyen el objeto matemático. El trozo es en sí mismo la totalidad del objeto, en un momento determinado para el sujeto, y es con esta totalidad, que aunque posiblemente difusa, progresivamente conforma versiones cada vez más "cercanas" a lo que desde la matemática se dice es el objeto.

- *Trozos*, porque colocándose al margen del camino, es decir, no teniendo en cuenta si se interpreta de tal o cual manera, en el trabajo algebraico escolar se requiere, según sea la situación trabajada, de interpretaciones específicas, e incluso de interpretaciones paralelas, en el sentido de que en algunos problemas se necesita interpretar distintas letras de manera distinta y simultáneamente, como en el ejemplo de Ursini (ver, p. 23).

- *Progresivos*, porque a partir de las investigaciones de Küchemann (1978, 1980), Enfedaque (1990), y ahora la que aquí se refiere, se infiere que los niños y jóvenes, de manera natural, en el proceso de aceptación y comprensión de esta noción, pasan, en el orden numérico asociado con las distintas interpretaciones, por cada una de ellas.

Ahora bien, la afirmación de que el camino ascendente, en orden numérico, por las distintas interpretaciones de letra, es natural, se explica, en parte, porque (1) Tales interpretaciones se dan de hecho[38] , y las expresiones escritas frente a las cuales se corrobora esta ocurrencia, en todas las investigaciones consultadas que han trabajado este tópico, son similares y (2) De los pronunciamientos en tales investigaciones, puede inferirse que el trabajo desarrollado por los profesores, en general, enfatiza la corrección sintáctica y que él mismo no tiene conocimiento ni consciencia de dichas interpretaciones[39] , luego no es por el trabajo que propone el profesor, que puede llegar a decirse que los estudiantes se comportan con la letra, en la forma como lo hacen. Ade-

[38] Ya se refirieron las investigaciones de Collis, Küchemann, Enfedaque, Ursini y ahora en este escrito se reporta la misma situación. También en los trabajos de grado, de pregrado y posgrado, que individual, o colectivamente se encuentran dirigiendo los integrantes del grupo PRETEXTO,

[39]En cada una de las presentaciones que el grupo ha realizado en encuentros regionales, e incluso en dos de carácter internacional, los asistentes han visto con sorpresa que la letra en contextos matemáticos tenga tan diversas interpretaciones, y reconocen que efectivamente las interpretaciones que motivan, privilegian no más allá de letra como incógnita específica.

más, porque tales interpretaciones aparecen (como se verificó con base en los cuestionarios y la observación realizada) en superposición y a veces en completa contravía, no consciente, de lo propuesto por el profesor.

Sin embargo, esta naturalidad no significa, de manera alguna, que tales interpretaciones aparezcan en los estudiantes, independientemente de que el profesor introduzca las letras para usos en matemáticas, distintos, por primera vez, al que tienen en el lenguaje ordinario. Ante este aparecimiento, dichas interpretaciones obedecen, primero, a que el contexto aritmético en el que han estado trabajando en grados anteriores a aquel en que hacen aparición obligada las letras, los hace recurrir al trabajo con números; segundo, a la aceptación de la letra, de esa manera gradual, por el trabajo con ecuaciones y modelización algebraica de enunciados verbales; y, tercero, a que una vez aceptada, se abre la posibilidad de tratamientos generalizados, bien como representación de objetos de un determinado universo, bien como representación de relaciones de dependencia en esos universos.

El pronunciamiento inmediatamente anterior, desde la perspectiva psicológica, por la naturalidad aducida, hace que las interpretaciones tengan carácter de necesidad. En cuanto a la necesidad epistémica, se explica porque ese camino de construcción lleva implícitas, en correspondencia con la secuencialidad psicológica, acciones también secuenciales de:

- Reconocer, y aceptar las letras, –objetos antiguos con su universo de pertenencia, sus contextos de uso, y en general, todo aquello que les sea atribuible desde el "mundo de vida"–, como apariciones, cosas, cosas por averiguar, cosas que refieren, cosas que refieren con generalidad, cosas que refieren con generalidad operatoria propia de cosas que se aceptan como números, cosas en sí mismas que se comportan como números, entre otras.

- Pero, por otra parte, ya en contextos matemáticos, se debe aceptar la existencia diferenciada, e imbricada de contextos aritméticos y algebraicos.

Ahora es necesario mostrar cómo se pueden asociar la jerarquía de Küchemann con la caracterización de variable elaborada aquí, por PRETEXTO. Esto se expondrá enseguida[40], luego de recordar y enumerar las características de variable:

1. *La variable pertenece siempre a un universo, y desde él debe ser interpretada.*

2. *El significado de variar que se le adjudica a la variable, corresponde al hecho que ella es representación, indistinta y simultánea, de los distintos individuos que conforman su universo.*

3. *Aparece siempre haciendo parte de una expresión, que da cuenta de la relación de dependencia que se desea destacar entre los individuos de su universo.*

4. *El universo al que pertenece la variable, sin ser tiempo, está implícitamente connotado de éste. En otras palabras, el tiempo se imbrica al universo de la variable, ajustándose a su cardinalidad y a su estructura.*

[40] i ⮫j es un símbolo que se utilizará no sólo para dar a entender que la interpretación i de Küchemann, se asocia con la característica j de variable, en el orden de aparición de éstas, sino también que, en el camino hacia variable las interpretaciones de letra, adhieren paulatinamente, vía la construcción, sustratos numéricos y referencias para la noción.

***Comentario*:** **i** ➦ **j** es un símbolo que se utilizará para expresar que la *interpretación de letra* **i**, desde la jerarquización propuesta por Kücheman, se asocia con la *característica de variable* **j**.

1 ➦ 1: El universo en el nivel 1 de Küchemann (letra evaluada) es, en general, el de los números naturales[41], luego esta interpretación lleva a que el operar con letras sólo sea posible si se cambia por un número natural. Sin embargo, la necesidad de tener al menos este universo para operar, abre la posibilidad de empezar a relacionar la letra con elementos de un conjunto por uno de cuyos individuos debe remplazarse. Se puede dar inicio entonces a la consciencia de un universo, si no de variación, sí de pertenencia para la letra.

2 ➦ 1: El universo en el nivel 2 de Küchemann (letra ignorada o no usada) es, en general, el de los números naturales, junto con letras, que no desempeñan otro papel que el de letras. Así, las operaciones en este universo, se realizan únicamente con los números, lo cual permite que se empiece a aceptar la letra como un elemento legítimo en expresiones aritméticas, no obstante su presencia indique tan sólo la aceptación de su presencia en las expresiones, como trazos hacia un esbozo de contexto algebraico.

3 ➦ 3: El universo de variación en el nivel 3 de Küchemann (letra como objeto), sigue siendo el

[41] Cuando aquí se dice que el universo para el nivel 1 de Küchemann es el de los números naturales, no quiere decirse que cuando la letra se evalúa, no pueda recurrirse a otros universos numéricos. Sólo que cuando los estudiantes interpretan la letra como evaluada, el universo numérico que poseen es precisamente el de los naturales, como efectivamente se corroboró en la investigación que se referencia.

> mismo que en el nivel 2, entendiéndose esta igualdad como presencia de los mismos individuos, pero ahora se requiere ampliar la significación de letra a cantidades de, no a cantidad, lo cual permite el empezar a involucrarla operatoriamente, y por tanto, empezar también a reconocer, así sea inconscientemente, que el universo de pertenencia asociado con este nivel, ya no es, como en los niveles anteriores, simplemente sustrato, ahora es una estructura, y estructura en el sentido matemático.
>
> Sin embargo, en este nivel, la letra no se desprende aún de la referencia concreta, es decir, la letra no representa cantidad, número, sino cantidad de, u objetos de los que hay una cierta cantidad, pero como se empieza a reconocer la estructura, a pesar de este último comentario, pueden realizarse acciones de carácter relacional. Piénsese en ejemplos del tipo: 1k = 1000g, donde k refiere kilos y g gramos.

Hasta el momento, se ha mostrado cómo las interpretaciones 1, 2, y 3, pueden ser asociadas con las características de variable en matemáticas, correspondientes a los hechos de necesidad de sustrato para la variación, y de involucramiento en alguna fórmula que exprese dependencia.

Su asociación con las características que refieren la idea de variar y de tiempo en la variable, no es posible fundamentalmente, en relación con la primera, por la rigidez referencial de los universos aducidos, pues recordando que ellos están constituidos por números, o números y letras, y que cuando son referidos por la letra, se invocan individuos particulares en estos, claramente se impide el paso a referir simultánea e indistintamente sus elementos. En relación con el tiempo, porque dichos universos al no poseer la propiedad de densidad -en el sentido matemático, es decir, intuitivamente hablando "la existencia de objetos a distancias arbitrariamente pequeñas, de cualquier objeto dado en ese universo del cual se dice es denso"-, no permiten introducir la temporalidad, ésta sí densa, por la intuición del tiempo como hecho denso.

Las interpretaciones 4, 5, y 6 (letra como incógnita, como número generalizado y como variable, respectivamente), no se comentan, pues la relación en que se pueden colocar con las características de variable en matemáticas es suficientemente "transparente", como para poder afirmar que tales relaciones corresponden a: 4 ➦ 1, 4 ➦ 3, 5 ➦ 1, 5 ➦ 2, 5 ➦ 3, 6 ➦ 1, 6 ➦ 2, 6 ➦ 3. La asociación de 4, 5 y 6 con 4, aparece o no, en la medida que se consideren universos de variación densos, compatibles con la intuición del tiempo.

3.4.5 Causas de incomprensión de la noción de variable y la formación del profesor. Ahora bien, ya en el terreno de las causas de incomprensión de la noción de variable en matemáticas, el mapa construido arriba, permite afirmar que en lo profundo de ellas, fundamentalmente aparecen las siguientes:

En relación directa con la noción de variable, se da la ocurrencia de tres hechos:

- ***El desconocimiento de los niveles de interpretación de la letra***

- ***La ausencia de reflexión en torno a la idea de variación***

- ***La ausencia de la utilización didáctica del saber existente sobre las interpretaciones y sobre la variación, para orientar a los estudiantes por ese camino natural, del que se ha dicho aquí, se debe recorrer para llegar a la noción de variable.***

Así, la incomprensión de las formas válidas de argumentación en el álgebra, hace que los estudiantes que de ella adolecen, intenten pronunciarse a través de otro tipo de argumentación. Este hecho, sin embargo, no es asumido por el profesor como discutible o criticable en términos de comprensibilidad, y esto:

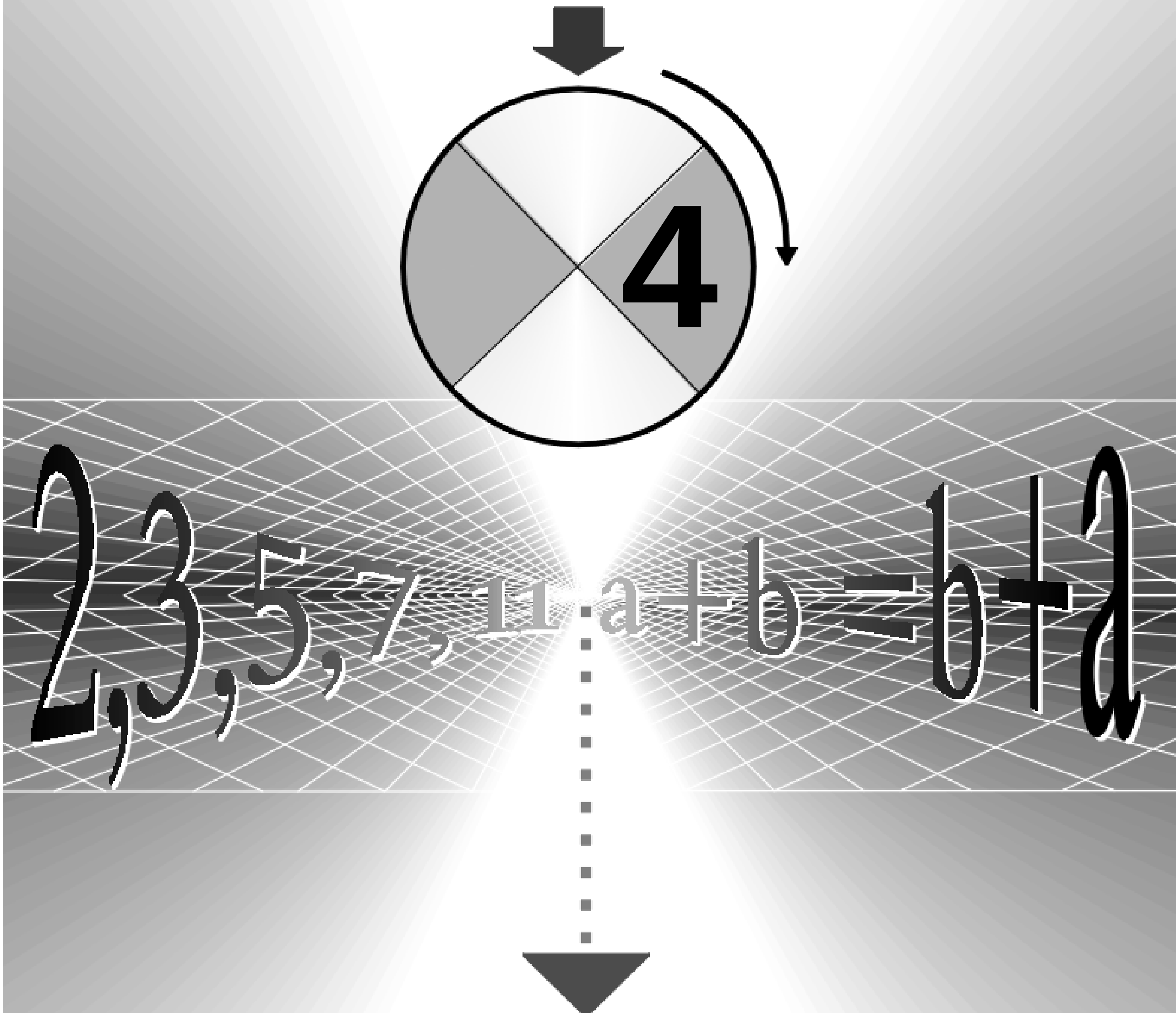
- ***Por su bajo nivel de interpretación de las diversas y múltiples manifestaciones de la situación descrita.***

- ***Porque su bajo compromiso con el hacer profesional, le permite realizar cortes intermitentes en la comunicación al ver el desarrollo del curso como una colección de horas de clase dictadas, coherente sólo mirándolas según el tránsito sobre un programa organizado por temas.***

Sin embargo, por contundente y específico que sea lo expuesto inmediatamente arriba, acá sólo ha emergido la manifestación de algo que es causa de esta manifestación. Pero, recurriendo a la observación, se descubre al respecto la generalidad de la actuación profesional descrita, en cada uno de los profesores, y puesto que en lo que les es común no figuran ni género, ni procedencia, ni lugar de profesionalización, ni concepciones de álgebra escolar, etc., es plausible buscar explicación en lo común de la formación de estos profesores. En efecto, el desempeño profesional coincide, en general, con el de aquellos que a su vez fueron sus profesores en las facultades de educación en donde estudiaron, y puesto que en ellas (otra vez la ausencia explica), no suele existir tematización del hacer profesional más allá de la mera formalidad dictaminada por un currículo entendido en general como plan de estudios, se desconoce en los programas de formación docente todo el corpus de conocimiento generado en los últimos años en la educación matemática[42].

Este desconocimiento se revela, en primer lugar, porque en los currículos de los programas de licenciatura en matemáticas, no existe consideración explícita de la necesidad de miradas conscientes e intencionales de temáticas tratadas por la Educación Matemática, centrándose más bien en la tradición de una componente principal en matemáticas, otra pedagógica y una tercera humanística, todas ellas escindidas. En segundo lugar, y en correspondencia con la componente disciplinar, el énfasis puesto a la matemática, hace que de hecho se descuiden considerablemente las otras dos componentes, resultando de ello unos docentes con algún dominio de la matemática, pero imposibilitados para pensar su enseñanza desde una perspectiva que retome comprensivamente los resultados de investigación obtenidos del trabajo en Educación Matemática. En tercer lugar, en la ausencia de integración de esos saberes a la práctica docente universitaria, con lo cual los futuros docentes se quedan fuera de la posibilidad de ganar experiencias vivenciales para orientar y reconformar su propia labor.

[42] La reconocida crisis de la educación en Colombia, apreciada en la respuesta que a nivel estatal quiere dársele, particularmente en la Constitución del 91, el informe de los sabios, las leyes para la educación basica y universitaria, sustentan esa debilidad que aquí se artibuye específicamente a la formación de docentes en matemáticas.



CONSIDERACIONES PRÁCTICAS PARA EL TRABAJO EN LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA–ÁLGEBRA

4 CONSIDERACIONES PRÁCTICAS PARA EL TRABAJO EN LA TRANSICIÓN ARITMÉTICA–ÁLGEBRA

A continuación se presenta, a manera de sugerencia –aunque sin entrar en detalles–, elementos que deben ser abordados desde el trabajo aritmético y permiten un tránsito más natural hacia el trabajo algebraico.

- Tomando como base la capacidad desarrollada por los estudiantes en el trabajo aritmético, plantear exigencias en cuanto a explicitar y dar cuenta de los procesos realizados –y en tal sentido, descentrar el interés en la búsqueda de respuestas–, así como tematizar las convenciones de notación.

- Posibilitar trabajo con la igualdad como relación de equivalencia. Un tema propicio para un trabajo en este sentido, lo constituye las fracciones, pues, además de tematizar la igualdad como relación de equivalencia, permite "romper" con la idea de *unidad fija* de medida, en tanto aquí, como ya se mencionó en una sección anterior, la unidad *varía*. Otro tema que permite el trabajo con clases de equivalencia, y que hace uso del algoritmo de Euclides, en los Naturales, ligando bases y sistemas de numeración, es el de clases residuales.

- Propiciar experiencias con procesos de generalización y búsqueda de patrones, en particular, como posibilidad de acercamiento a la noción de variable, además de la necesidad de que "el número generalizado" varíe en diferentes universos numéricos.

- Propiciar actividades a partir del trabajo con los conjuntos numéricos, inicialmente ligadas a la variación –tanto en conjuntos discretos como densos–, que posibiliten interpretaciones de la letra como representación indistinta y simultánea de individuos en estos conjuntos. En particular se propone un trabajo de tipo constructivo para "dar existencia" a los números racionales, basado en el "saber previo" del estudiante, sobre estructura multiplicativa en el conjunto de los números naturales.

- Proponer actividades que favorezcan discusiones en torno a la idea de continuidad de la variable, ligada a la noción de infinito.

- Posibilitar percepciones de la variación a partir del análisis de tablas o del análisis de gráficas, que representen relaciones entre parámetros.

- Proponer actividades que requieran de diversas interpretaciones de la letra.

Ahora bien, es necesario reconocer que lo planteado anteriormente, no garantiza obtener mejores niveles de comprensión de lo tratado en clase; se debe tener en cuenta además que lo realizado corresponde, como se dijo en el capítulo primero, a un acto de comunicación, en el que el profesor, por ser quien orienta el trabajo de aula, debe buscar estar al tanto de las dificultades que pueden surgir en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, muchas de los cuales se refieren a lo largo de este escrito, particularmente lo que tiene que ver con la posibilidad de discusión sobre las pretensiones de validez de los discursos planteados en el aula, y a su interior.

4.1 ALGUNAS ACTIVIDADES

A continuación se presentan actividades que posibilitarían, de acuerdo a la orientación dada por el profesor, el desarrollo de procesos de generalización y simbolización:

- ***Búsqueda de patrones:***

***Actividad 1*:** Utilice el siguiente gráfico para responder las preguntas formuladas.

(1ª posición) (2ª posición) (3ª posición)

a) Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición.

b) Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición.

c) Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100.

d) Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.

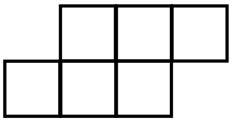
e) Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

Actividad 2 **:** "Un truco con números": Piense un número, añádale 4 y multiplique el resultado por 2. Réstele 6 y luego divídalo por 2. Ahora réstele el número que pensó al principio: ... el resultado es 1.

Lenguaje ordinario (Representacción verbal)	*Lenguaje intermedio (Rep. Visual/Geométrica)*	*Lenguaje algebraico (Rep. algebraica)*
El número que se piensa	□	n
Añada cuatro	□ ••••	$n+4$
Multiplique por dos	□ □ ••••••••	$2(n+4)=2n+8$
Reste seis	□ □ ••	$2n+2$
Divida por dos	□ □ •	$n+1$
Reste el número inicial	•	1

Es necesario reconocer que el «camino» a la simbolización formal está precedido de un análisis a partir de una variedad de situaciones concretas, propuestas por los estudiantes, con números específicos, así como de los acercamientos a formas de simbolizar «propias» de los estudiantes.

Actividad 3 **:** ¿Se le pueden agregar "baldosas" a la figura, formada por baldosas cuadradas de una unidad de lado, para conseguir una nueva figura cuyo perímetro sea 18 unidades?. Se impone como regla que las baldosas deben estar unidas entre sí por, al menos, un lado completo.



En la propuesta de los *Estándares Curriculares* del NCTM[43], se plantea que los estudiantes pueden descubrir muchos hechos y relaciones de interés al explorar este problema, por ejemplo, que al agregar una baldosa que toque a otra sólo en un lado el perímetro se aumenta en dos unidades, pero si ésta se coloca para cubrir una esquina (es decir, en contacto con otras dos baldosas), el perímetro no se altera; mientras que si ésta se coloca tocando tres de sus lados con las otras baldosas, el perímetro de la nueva figura se disminuye en dos unidades (hecho que puede motivar acercamientos a la simbolización, como p+2, p y p-2).

En relación con esta actividad, se sugiere que una vez los grupos de estudiantes hayan encontrado diversas formas de añadir baldosas para encontrar la figura pedida, con un perímetro de 18 unidades, pueden abordar preguntas como ¿cuál el el número *mínimo* de baldosas que habría que añadir?, ¿cuál es el mayor número de baldosas que se pueden usar para obtener dicho perímetro?. Sobre la segunda pregunta, y tomando en cuenta que el rectángulo que tenga 4 por 5 es el que más baldosas necesita, plantean una tercera pregunta: ¿qué otros rectángulos tienen perímetro 18 unidades?. La obtención y organización de los datos puede dar

43 NCTM (1992, p. 104): *National Council of Theachers of Mathematics*. Una presentación general de esta propuesta se encuentra en el anexo.

origen a varias actividades. Por ejemplo, relacionadas con formas de representación (verbal, gráfica, tabular y fórmula) y, en general, el trabajo con expresiones lineales.

***Actividad 4*:** La rueda de la figura gira en el sentido indicado por la flecha, partiendo del número 1. Gana quien saque el número más alto (bajo la ⇩)[44].

(Gira en el sentido de la flecha)

a) Un niño la hace girar, haciéndola avanzar 7 posiciones y una niña la hace girar avanzando 5 posiciones. ¿Quién ganó y con qué número?.

b) Un niño la hace girar, haciéndola avanzar 13 posiciones y una niña la hace girar avanzando 15 posiciones. ¿Quién ganó y con qué número?.

c) El niño la hace girar y avanza **n** posiciones y la niña la hace avanzar el doble de posiciones que él. ¿Pueden sacar el mismo número?. Explique su respuesta.

La actividad 3 puede retomarse para posibilitar el trabajo con otros universos numéricos, si se quita la condición de agregar baldosas completas y se propone, por ejemplo, buscar "arreglos" rectangulares cuya área sea 20 unidades cuadradas.

[44] Como se planteó en el capítulo anterior, este problema, tanto desde el punto de vista de las operaciones que intervienen, como del número de soluciones que posee, puede ser un poco difícil, sin embargo es un problema que los estudiantes abordan con interés.

- ***Universos numéricos:***

Actividad 5. El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura.

a) Escriba en el cuadro las medidas de la base y la altura de cinco rectángulos distintos cuya área sea 6 centímetros cuadrados.

Rectángulo	**Medida de la base**	**Medida de la altura**
1º		
2º		
3º		
4º		
5º		

b) Escriba las medidas de la base y la altura de tres rectángulos distintos cuya área sea 3$\sqrt{2}$.

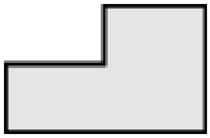
Rectángulo	**Medida de la base**	**Medida de la altura**
1º		
2º		
3º		

La primera parte de esta actividad, puede trabajarse multiplicativamente de manera correcta con números naturales, pero sin agotar los cinco ítemes propuestos, para lo cual deben recurrir a otros universos numéricos (decimales o fraccionarios). La segunda, requiere, obligatoriamente, trabajar multiplicativamente por lo menos con múltiplos de $\sqrt{2}$.

Actividad 6. Se define *hexa-recto* como el polígono de forma hexagonal, cuyos lados consecutivos siempre forman un ángulo recto (lados perpendiculares).

a) En principio, debe plantearse la siguiente pregunta: ¿Existen hexa-rectos?. En caso afirmativo muestre uno (gráficamente), de lo contrario, exponga las razones por las cuales considera que no pueden existir dichos objetos. Pues, en principio, existe la tendencia a suponer que el hexágono es convexo y ademásregular, en tanto es la primera imagen que «aparece».

   Una vez se haya encontrado que los hexa-rectos son de la forma:



   se puede plantear actividades como:

b) Construya dos hexa-rectos cuyo perímetro sea 24 unidades.
c) Encuentre el mayor número de hexa-rectos con esta condición.
d) De todos los hexa-rectos encontrados, ¿cuál es el de mayor área?[45], ¿por qué?.

Finalmente se presenta una propuesta para el trabajo en el contexto de las *ecuaciones*, que permite miradas de la letra no sólo como incógnita específica (como podría considerarse

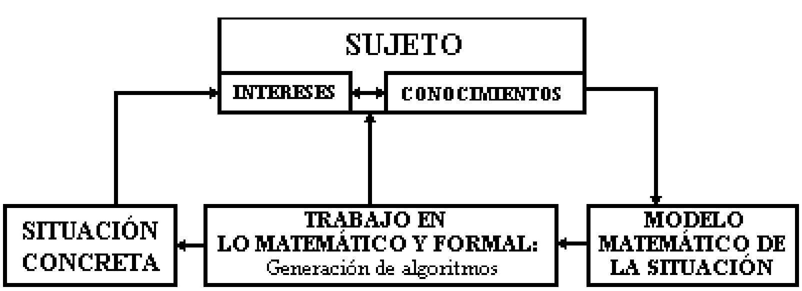
[45] Existe la tendencia a trabajar sólo en el universo de los naturales, la cual puede ponerse en cuestión, a partir de esta actividad, comparando las respuestas dadas e invitándolos a encontrar una figura con área mayor a las dadas, hasta que «aparezcan», por ejemplo, los decimales y pueda comprobarse que siempre se puede encontrar una figura de mayor área, con la condición inicial de tener perímetro 24, es decir, que no existiría *el* hexa-recto de mayor área.

"natural"), sino también como número generalizado y como variable.

4.2 LAS ECUACIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS: *Elementos para una propuesta.*

Dentro de un contexto matemático, nada mejor que proponer actividades en las que aparezcan situaciones matematizables. Para ello las ecuaciones, vistas como modelos matemáticos, son una herramienta fundamental. En este sentido deben entenderse las actividades propuestas a continuación.

En el siguiente diagrama se presenta un esquema del tratamiento metodológico–conceptual a usar para el desarrollo del tema de ecuaciones; sin embargo, sirve como modelo aplicable al tratamiento de otros:



Este esquema hace énfasis en el sujeto, pues es quien crea y conoce, e ilustra la concepción que, como grupo, se comparte sobre el conocimiento y sobre el papel activo que debe tener un sujeto en la construcción de su aprendizaje. A la vez es una justificación de la manera de presentar esta introducción a las ecuaciones.

Inicialmente, una ecuación puede considerarse como un modelo matemático en el que una entidad se pone en relación de igualdad con sí misma, o con otra u otras entidades. Esta afirmación se aclarará luego de ver algunos ejemplos y estudiar algunas «situaciones concretas».

Las siguientes expresiones son ecuaciones:

- $n(n-1)/2 = 21$
- $10Z = 2(Z+6)$
- $t = t+1$
- $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$
- $2^x = 65536$
- $Y = 3X$
- $3+1 = 2+2$

Y pueden aparecer como matematización de situaciones como:

(1) *En la primera vuelta de un campeonato de microfútbol en el que cada equipo debe jugar con cada uno de los otros, por las disponibilidades de escenario y de tiempo, se deben efectuar exactamente 21 partidos. ¿Cuál debe ser el número de equipos que participe en el torneo?.*

Una de las primeras dificultades que se debe superar, es cómo referirse al número de equipos si no se sabe cuál es ese número; una manera de resolverla consiste en representar ese número con una letra. Este hecho puede ser enunciado así:

sea $\mathbf{n}$ *el número de equipos,*

luego se continúa en la búsqueda de un modelo matemático tratando de relacionar a *n* con la cantidad de partidos, 21, que esos *n* equipos deben jugar. Una manera de razonar para encontrar tal relación es la siguiente : Como cada uno de los *n* equipos juega con los *n-1* restantes, entonces podría pensarse que el número de partidos jugados sería *n(n-1);* mas sin embargo aquí se estaría contabilizando el doble de partidos, puesto que si un equipo A juega con otro B, sólo debe contabilizársele a A, o bien a B pero no a ambos, por lo tanto el número de partidos depende de *n* de la manera siguiente:

$$n(n-1)/2 = 21$$

La anterior ecuación puede trabajarse, adicionalmente, a partir de actividades como:

- *En una reunión de amigos, en la que cada quién saludó a los demás con un estrechón de manos, se contabilizaron 1225 saludos, ¿cuántas personas asistieron a dicha reunión?*

- *En una localidad, las casas están distribuidas de tal manera que coinciden con los vértices de un polígono regular. Si todas las casas se comunican entre sí por caminos rectilíneos y hay 55 de esos caminos, ¿cuántas casas tiene la localidad?*

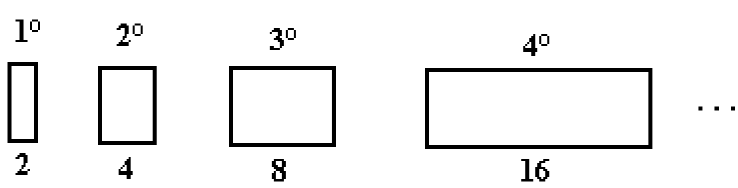
Al trabajar estas últimas situaciones, se puede comprobar que las ecuaciones a las que se llega son análogas y que en realidad no interesa si *n* representa el número de equipos, el número de saludos o el número de casas; el análisis de cada situación es esencialmente el mismo y por ello se llega al mismo *modelo matemático.*

(2) *Dos hombres miden el perímetro de un terreno rectangular. Uno de ellos utiliza como unidad de medida una varilla y encuentra que éste equivale a 10 varillas. El otro utiliza una cinta de cuatro metros y la varilla, encontrando que la longitud de la cinta más la de la varilla equivale a la de uno de los lados, y el otro a la mitad de la cinta. ¿Es posible encontrar la longitud de la varilla sin medirla?, ¿ de qué manera?, ¿ cuál es el perímetro?.*

(3) *Al año de haber nacido Martha, nació Juan. ¿En qué momento la edad de Martha será la misma edad de Juan?.*

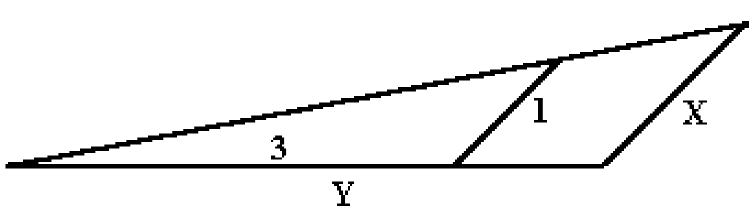
(4) *Exprese, si es posible, el área del cuadrado de lado x+1 en términos de las áreas de rectángulos de lado x ó 1.*

(5) *En la siguiente secuencia*



¿cuál es el lugar que ocupa el rectángulo cuyo lado inferior mide 65536 mts?

(6) *A partir de la figura, exprese Y en términos de X:*



> ***Comentario:*** Esta actividad posibilita el trabajo con parejas de números X, Y que estén en la relación 1 a 3 (en tal sentido, permite acercamientos a interpretaciones de la letra como número generalizado), así como su representación en el plano cartesiano, funciones lineales, proporcionalidad, entre otras.

De las ecuaciones planteados como ejemplos al inicio de esta sección, quizá la más extraña sea la última, pero no por extraña deja de ser una ecuación. Aunque es una igualdad, en apariencia del todo evidente, hay que precisar para quién lo es. Se puede imaginar a un niño de cuatro años frente a dos colecciones con idéntico número de elementos todos iguales y organizados así:

A	#	#	#	#	
B	#	#		#	#

Al preguntársele si en esas colecciones hay la misma cantidad de #, él responderá que hay más en la **B** y esto incluso si él «sabe» contar hasta cuatro o más y haber contado *cuatro* # en cada colección.

Este es un ejemplo bastante ilustrativo sobre la relatividad de lo evidente y sobre las construcciones mentales requeridas para aprehender un concepto. Para esta situación, en realidad el concepto subyacente es el de número natural; al no tenerlo, el niño no puede entender que la frase $3+1 = 2+2$ es verdadera, así como tampoco que $4 = 4$ es verdadera, pues no sabe qué significa 4 como número abstracto.

Lo expuesto inmediatamente antes, es de vital importancia para entender en qué sentido se hace el enunciado con el que comienza la sección y en el que se quiere hacer énfasis acerca de la necesidad de la comprensión (posibilitada por la confrontación de un sujeto con un problema que le ofrece un contexto de significación y le convoca a su solución) tanto de los entes que pone en relación como de la misma relación, que para el caso de las ecuaciones es una relación de igualdad.

Cuando se afirma que es importante entender que la relación involucrada en una ecuación es la de igualdad y lo que ello implica, es debido a que al tener esta comprensión se tiene también la de las maneras de manejarla. Ya Euclides en sus Elementos se da cuenta de ello y aunque cree que las maneras de manejar las igualdades son nociones comunes, las hace explícitas y formula que:

1. *Cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí.*
2. *Si a cosas iguales se añaden otras iguales, los totales son iguales.*
3. *Si a cosas iguales se quitan otras iguales, los restantes son iguales.*

Hoy en día, la actividad de los matemáticos y la necesidad de elaborar un lenguaje formal han cambiado la forma de presentación de estas «nociones comunes»; se admite que no son tan comunes y que incluso es necesario definir la igualdad. Las entidades que se ponen en relación de igualdad, cuando ellas hacen parte de una ecuación, son números, o por lo menos representaciones literales de esos números. Aquí también hay mucha tela que cortar, como que a la humanidad le costó cerca de cuarenta siglos pasar de una numeración, en la que cada número tenía su propio signo, al actual sistema de numeración arábiga popularizada en Europa sólo hasta el siglo XVI, aunque parece que se originó en la cultura Hindú antes del siglo VII. Con este sistema de numeración se dispone de una herramienta poderosa capaz de permitir la expresión de cualquier número natural con únicamente diez dígitos, y posibilita la potenciación, acumulándose así el conocimiento requerido para encontrar métodos mecánicos y generalizables para efectuar las cuatro operaciones elementales y se da comienzo, con la notación sincopada, a una nueva manera de producir conocimientos matemáticos.

Es pues, dentro de tal contexto, que aparecen de manera sistemática las ecuaciones y la búsqueda de soluciones para ellas. Otras propuestas en relación con la *iniciación al álgebra* pueden consultarse en Socas y otros (1996) y Azarquiel (1993)[46].

[46] En relación con perspectivas de investigación y enseñanza del álgebra ecolar, puede consultarse el siguiente trabajo: BEDNARZ, N. and KIERAN, C. (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives and Theaching*. Netherlands : Kluwer, 1996.

Referencias Bibliográficas

AZARQUIEL, Grupo (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Síntesis.

CIFUENTES, A. y OCHICA, A. (1998). *Interpretaciones de letra en el álgebra escolar*. Santa Fe de Bogotá. Trabajo de Grado (Licenciada en Matemáticas). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Facultad de Ciencias y Educación. Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas.

COLLIS, K. (1975). *The Development of Formal Reasoning.* Australia: University of Newcastle.

COLLIS, K. (1982). *La Matemática Escolar y los Estadios de Desarrollo.* En: Infancia y aprendizaje. N° 19-20. p.39-74.

GRUPO PRETEXTO (1993). *La variable como concepto matemático y su enseñanza: ¿Un asunto de evidencia?.* X Coloquio Distrital de matemáticas y Estadística. Santa Fe de Bogotá.

GRUPO PRETEXTO (1996). *La variable en matemáticas como problema puntual: Búsqueda de causas en octavo grado.* Informe final de investigación. Santa Fe de Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas – COLCIENCIAS.

KIERAN (1981). *Concepts associated with the equality symbol.* En: Educational Studies in Mathematics, No. 12; p. 317-326.

KIERAN, C. (1989). *The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective.* p.33-55. En: WAGNER, S. and KIERAN, C. (Eds.). Research Issues in the Learning and Theaching of Algebra. Reston (Virginia): National Council of Theachers of Mathematics. Vol. 4. 288p.

KÜCHEMANN, D. (1978). *Children´s understanding of numerical variables.* En: Mathematics in School. Vol. 7, N° 4; p. 23-26.

KÜCHEMANN, D. (1980). *The meaning children give to the letters in generalised arithmetic.* En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. The University of Leeds; p. 28-33.

KÜCHEMANN, D. (1981). *Algebra.* p. 102-119. En: HART, K. (Ed.). Children´s Understanding of Mathematics: 11-16. London: John Murray.

MOROS, C. et. al. (1997). *Dificultades en la interpretación y el uso del signo igual en alumnos de quinto grado: Un estudio exploratorio.* Trabajo de Grado (Especialista en Educación Matemática). Santa Fe de Bogotá, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Posgrado en Educación Matemática.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1992). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* 2ª Ed. Sevilla : THALES.

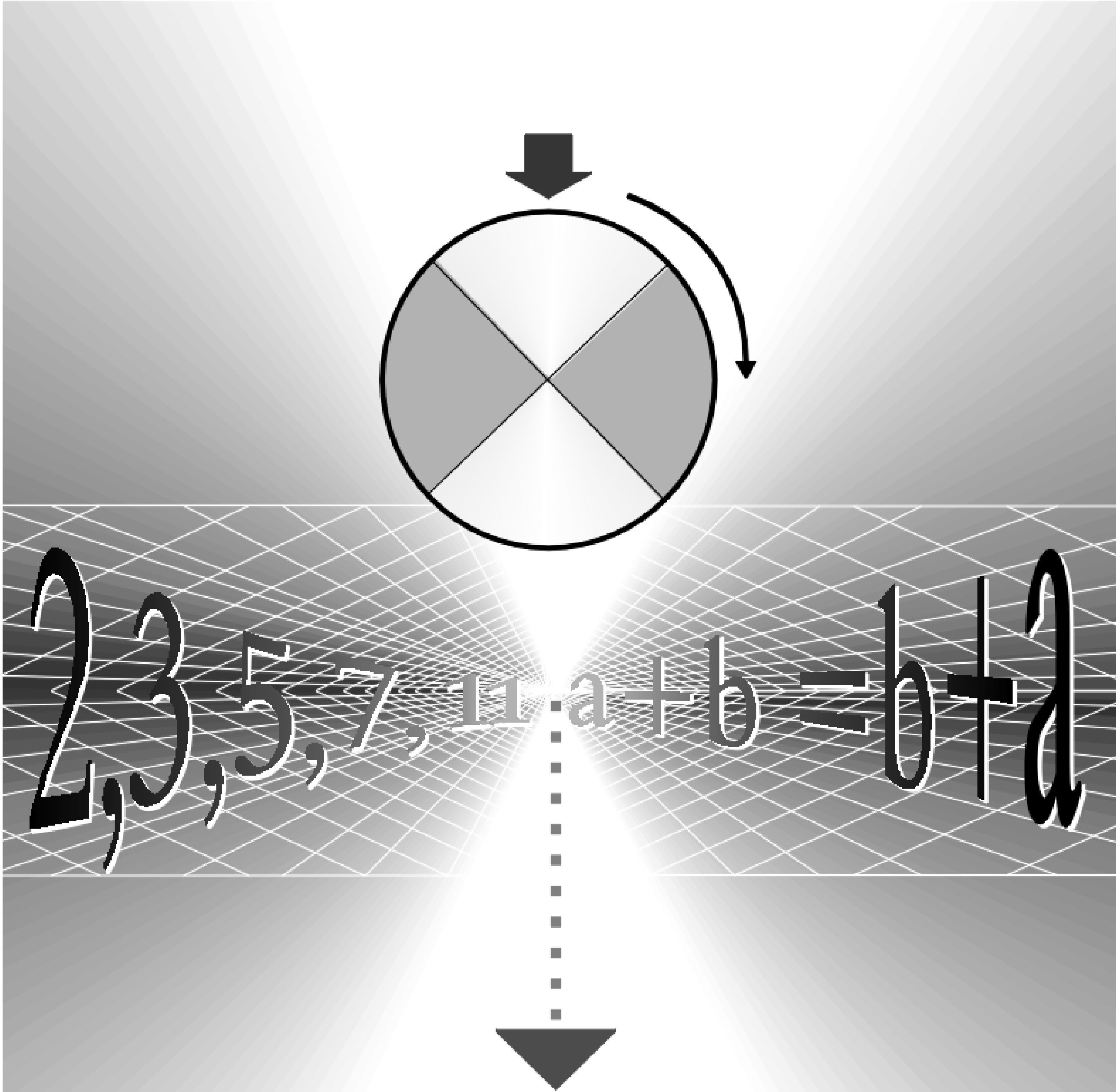
RODRÍGUEZ, J. y ROJAS, P. (1996). *La comunicación en la matemática escolar.* En : Educación y Cultura. N° 40; p. 16-19.

ROJAS, P. y Otros (1997). *Iniciación al álgebra.* XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Santa Fe de Bogotá: Universidad Distrital.

SOCAS, M. et. al. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

URSINI, S. (1994). *Los niños y las variables.* En: Educación Matemática. Vol. 6, N° 6; p. 90-108.

USISKIN, Z. (1980). *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables.* p. 8-19. En: COXFORD, A. (Ed.). The Ideas of Algebra, K-12: 1988 Yearbook. Reston (Virginia): NCTM.



ANEXO:
ESTÁNDARES CURRICULARES DEL NCTM

ANEXO: ESTÁNDARES CURRICULARES DEL NCTM

La comunidad de educadores matemáticos en EE.UU., y en particular el *National Council of Teachers of Mathematics* (N.C.T.M.), ha participado desde hace varios años en la discusión sobre :

- *Qué significa tener una cultura matemática,*
- *Qué matemáticas necesitan conocer los alumnos,*
- *Qué deben hacer los profesores para que sus alumnos desarrollen su conocimiento matemático y*
- *Cuál debe ser el contexto en que se desarrolla "el" proceso enseñanza-aprendizaje*[*] .

Tomando como referencia el hecho de que los países industrializados han experimentado un cambio de una sociedad industrial a una sociedad basada en la información (donde ésta es considerada tanto nuevo capital, como nuevo material, y la comunicación el nuevo medio de producción), por lo cual se han transformado tanto los aspectos de

* Aunque esta discusión es de carácter mundial, podría afirmarse que los estándares del N.C.T.M. se constituyen en el primer esfuerzo por sistematizar gran parte de las propuestas generadas a partir de la discusión sobre el tema. En el documento referenciado, se encuentra una gran variedad de actividades de trabajo en el aula para los diversos niveles (desde preescolar a grado 12).

la matemática que hace falta "transmitir", como los conceptos y técnicas que se requieren manejar, el NCTM ha presentado una propuesta sobre estándares curriculares, los cuales son planteados "para guiar la revisión del currículo matemático escolar y la evaluación asociada a esta posición". Las razones planteadas por el NCTM para adoptar estos estándares son : Asegurar la calidad, Explicitar objetivos y Propiciar cambios. En estos estándares se proponen como fines generales para todos los estudiantes que:

(1) *Aprendan a valorar las matemáticas,*

(2) *Se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas*

(3) *Lleguen a resolver problemas matemáticos*

(4) *Aprendan a comunicarse mediante las matemáticas*

(5) *Aprendan a razonar matemáticamente*

En tal sentido, plantean que se debe posibilitar :

> *que los estudiantes experimenten situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre sí, que los lleven a valorar las tareas matemáticas, desarrollar hábitos mentales matemáticos y entender y apreciar el papel que las matemáticas cumplen en los asuntos humanos; que debe animárseles a explorar, predecir e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas complejos ; que deben leer, escribir y debatir sobre las matemáticas, y que deben formular hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de una hipótesis (p. 5).*

En los estándares se integra tres características que se asocian a la matemática : *"saber" matemáticas es "usar" las matemáticas,* la información adquiere valor en tanto resulta de utilidad en el curso de alguna actividad que se emprende para conseguir un objetivo; *el uso de la matemática ha cambiado,* se cuenta con ordenadores que tienen gran capacidad para procesar grandes paquetes de información, lo cual ha centrado el interés en la cualificación y el análisis lógico de la información, así como en ofrecer oportunidades para desarrollar una comprensión de modelos, estructuras y simulaciones matemáticas (en tanto las matemáticas son una disciplina básica para otras disciplinas y crecen en proporción directa con su utilidad) y *los cambios tecnológicos y la ampliación de las áreas donde se utilizan las matemáticas han provocado a su vez un crecimiento y un cambio de las mismas matemáticas, por cuanto han cambiado los problemas y los métodos que usan los matemáticos para investigarlos.*

Reconocen, sin embargo, que *el acceso a la tecnología* ***no*** *garantiza que los estudiantes adquieran una cultura matemática*, por cuanto sólo constituye una herramienta que puede simplificar las tareas pero no las resuelve. En ese sentido, plantean que su visión sobre las *matemáticas escolares* se basa en las matemáticas básicas que van a necesitar los estudiantes, y no sólo en el entrenamiento tecnológico que les va a facilitar el manejo de dichas matemáticas. Aún más, plantean que la disponibilidad de calculadoras no quita que los estudiantes tengan que aprender (comprensivamente) ciertos algoritmos y que exista un cierto dominio del cálculo de algoritmos con lápiz y papel, pero que dicho conocimiento debe surgir de las situaciones problemáticas que han dado lugar a que se necesiten dichos algoritmos.

Por otra parte, se destaca que si bien, al desarrollar los estándares, consideraron que el contenido fuera apropiado para todos los estudiantes, esto no quiere indicar que se piense que todos los estudiantes son iguales, sino que ***reconocen que los estudiantes muestran diferentes talentos, capacidades, logros e intereses en relación a las matemáticas***. Así mismo, aceptan que *el aprendizaje* ***no*** *ocurre solo por "absorción pasiva"*, sino que *se dan multitud de situaciones en que el individuo se enfrenta a una tarea nueva con conocimientos previos*, asimila la información nueva y [re]construye sus propias ideas. Por ejemplo, antes que se le enseñe a un niño la suma y la resta, él ya puede resolver algunos problemas de suma y resta usando rutinas tales como "contar hacia adelante o hacia atrás". *A medida que se avanza en el trabajo escolar los niños usan con frecuencia estas rutinas aún después de habérseles enseñado procedimientos más formales para la resolución del problema y* ***sólo aceptan ideas nuevas cuando sus ideas primeras no funcionen o sean ineficaces***. También reconocen que las ideas no se encuentran aisladas en la memoria sino que se organizan y se asocian con la lengua natural que uno usa y las situaciones con las que uno se ha encontrado en el pasado (punto de vista constructivista y activo de los procesos de aprendizaje). En tal sentido consideran que la docencia debería variar e incluir oportunidades en función de:

- Trabajos adecuados (a partir de situaciones problemáticas que generen interés).
- Tareas individuales y de grupo.
- Discusión entre profesor(es) y alumnos y entre los propios alumnos.

- Práctica sobre los métodos matemáticos.
- Exposición por parte del profesor (como *una* actividad, no como *la* actividad central).

Ahora bien, se resalta que otra premisa de los estándares es que las situaciones de problema deben ser acordes con la madurez –tanto matemática como cultural– y la experiencia de los estudiantes. Por ejemplo, plantean que en los primeros cursos (0° a 4°) se debe hacer **énfasis en el lenguaje empírico** de las matemáticas de números naturales y que sólo en los cursos intermedios (5° a 8°) la matemática empírica debe extenderse a otros números y el centro de atención debe pasar a ser la **construcción del lenguaje abstracto** de las matemáticas que se necesita para el álgebra y demás aspectos de las matemáticas. Las matemáticas en la enseñanza secundaria (9° a 12°) deben hacer hincapié en las funciones, sus representaciones y usos, construcción de modelos y demostraciones deductivas.

> *Los estándares especifican que la docencia debe ser desarrollada a partir de situaciones de problema. Siempre que las situaciones resulten familiares, se crean conceptos a partir de objetos, sucesos y relaciones en las que llegan a entenderse las operaciones y estrategias. De esta manera los estudiantes desarrollan un entramado de apoyo que puede aprovecharse más tarde, cuando las reglas se hayan podido olvidar, pero la estructura de la situación siga grabada en la memoria como el cimiento sobre el qué reconstruirlas. Las situaciones han de ser lo suficientemente simples como para que se las pueda manejar, pero lo suficientemente complejas como para que permitan una pluralidad de enfoques. Deben resultar amenas para la docencia individual, en grupos pequeños o gru-*

> *pos grandes, incluir diversos aspectos de las matemáticas y ser abiertas y flexibles en cuanto a los que deban usarse. (p. 11).*

Como un elemento de análisis, se presenta a continuación un resumen sobre los temas (en cada uno de los trece estándares curriculares propuestos) que, según lo plantea el NCTM, merecen más atención en los *niveles de quinto a octavo*, así como los temas que merecen menos atención:

MERECEN MÁS ATENCIÓN	**MERECEN MENOS ATENCIÓN**
Resolución de problemas:	
Problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas.	Practicar con problemas rutinarios de un solo paso.
Investigar y formular preguntas a partir de situaciones de problema.	Practicar con problemas categorizados por tipo (p.ej. problemas con monedas, problemas sobre la edad).
Representar situaciones de forma verbal, numérica, gráfica, geométrica o simbólica.	
Comunicación:	
Discutir, escribir, leer y escuchar ideas matemáticas.	Realizar fichas de trabajo rellenando los huecos.
	Responder a preguntas que sólo exigen como respuesta sí, no o un número.
Razonamiento:	
Razonar en contextos especiales.	Depender de una autoridad externa (el profesor o una respuesta correcta).
Razonar con proporciones.	

Razonar a partir de gráficas.

Razonar inductiva y deductivamente.

Conexiones:

Conectar las matemáticas con otras materias y con el mundo fuera del aula.	Aprender temas aislados.
Conectar temas dentro de las matemáticas y aplicarlas.	Desarrollar destrezas fuera del contexto.

Número/Operaciones/Cálculos:

Desarrollar el sentido numérico.	Memorizar reglas y algoritmos.
Desarrollar el sentido operacional.	Practicar con tediosas operaciones con lápiz y papel.
Crear algoritmos y procedimientos.	Encontrar formas exactas para respuesta.
Usar la estimación tanto para la resolución de problemas como para comprobar lo razonable de los resultados.	Memorizar procedimientos, como la multiplicación en cruz, sin entenderlos.
Explorar las relaciones entre representantes de números naturales, fracciones, decimales, números enteros y números racionales y sus operaciones.	Practicar el redondeo de números fuera de contexto.
Desarrollar estructuras conceptuales para razón, proporción y porcentaje.	

Patrones y funciones:

Identificar y usar relaciones funcionales.	Estos temas rara vez se encuentran en el currículo actual.
Desarrollar y usar tablas, gráfi-	

cas y reglas para descubrir situaciones. Realizar una interpretación entre diferentes representaciones matemáticas.	
Álgebra:	
Desarrollar estructuras conceptuales para variables, incógnitas, expresiones y ecuaciones. Utilizar toda una gama de métodos para resolver ecuaciones lineales e investigar de manera informal inecuaciones y ecuaciones no lineales.	Manipular símbolos. Memorizar procedimientos y hacer práctica de repetición sobre resolución de ecuaciones.
Estadística:	
Utilizar métodos estadísticos para descubrir, analizar, evaluar y tomar decisiones.	Memorizar fórmulas.
Probabilidad:	
Crear modelos experimentales y teóricos de situaciones que impliquen probabilidad.	Memorizar fórmulas.
Geometría:	
Desarrollar estructuras conceptuales para objetos y relaciones geométricas. Utilizar la geometría para la resolución de problemas.	Memorizar vocabulario geométrico. Memorizar hechos y relaciones.
Medición:	
Hacer estimaciones y realizar mediciones para resolver problemas	Memorizar y manipular fórmulas.

	Conversión interna y entre varios sistemas de medida.
Recursos metodológicos:	
Utilizar materiales concretos.	Enseñar cálculos fuera de contexto.
Implicar de forma activa a los estudiantes por separado y en grupos en la exploración, elaboración de conjeturas, análisis y aplicación de las matemáticas tanto en un contexto matemático como en un contexto del mundo real.	Hacer prácticas de repetición sobre algoritmos con lápiz y papel.
	Enseñar temas por separado.
	Hacer hincapié en la memorización.
Usar tecnología apropiada para los cálculos y la exploración.. Ser un facilitador del aprendizaje	Ser el dador de conocimiento.
Evaluar el aprendizaje como parte integral de la docencia.	Hacer exámenes con el único objetivo de dar notas.

Editado por
Grupo Editorial Gaia
Calle 74 No. 22-70
Teléfono: 482 20 61
Bogotá, D.C. Colombia
gaiaeditorial@gmail.com

Se imprimieron 200 ejemplares
Septiembre de 1999